GROUPE CONCOURS POLYTECHNIQUES

EPREUVE COMMUNE AUX CONCOURS
PH-M, PH-P, CH-P, CH-P'

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

Présentation du problème.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté x.y et l'on pose $\|x\| = \sqrt{x.x}$. Soient G le groupe des endomorphismes orthogonaux de E, et S l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques de E ; on rappelle que S est l'ensemble des endomorphismes diagonalisables dans une base orthonormée de E. Soit S^+ le sous-ensemble des endomorphismes symétriques de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. L'application identique de E est notée i.

Ce problème se compose de ~~4~~ 2 parties qu'il faut traiter dans l'ordre indiqué ; à chaque étape, les résultats indispensables pour poursuivre sa résolution sont explicitement énoncés. La partie A a pour but de définir une application exponentielle de S dans S^+ et d'en établir quelques propriétés. La partie B contient le résultat essentiel du problème : tout endomorphisme bijectif f de E est d'une façon unique le produit $g \exp s$ d'un élément g de G et de l'exponentielle d'un élément s de S.

A) Exponentielle d'un endomorphisme symétrique.

Si s est un endomorphisme (pour le moment quelconque) de E, et si $B = (e_1, \ldots\ldots, e_n)$ est une base de E, on note s_B la matrice de s dans B, et $\|s\|_B$ le maximum des valeurs absolues des n^2 éléments de s_B ; on sait que les éléments de s_B représentent les composantes de s dans une certaine base de l'espace vectoriel L(E) des endomorphismes de E ; par conséquent, l'application $s \mapsto \|s\|_B$ est une norme sur l'espace vectoriel L(E). On associe à s la suite des endomorphismes

$$u_k = i + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{s^k}{k!},$$

c'est-à-dire $u_k = P_k(s)$, avec des polynômes P_k dont la définition est évidente ; si cette suite (u_k) converge pour la norme définie ci-dessus, sa limite u est notée $\exp s$. En fait l'existence et la valeur de cette limite sont indépendantes du choix de la base B ; cela résulte de l'équivalence de toutes les normes sur L(E), ou encore de la formule de changement de base pour les matrices d'endomorphismes.

On se contentera ici d'étudier des cas où s est diagonalisable, en profitant des simplifications qu'apporte cette hypothèse.

A1) Démontrez l'existence de $\exp s$ lorsque s est diagonalisable ; pour cela vous utiliserez une base B de E judicieusement choisie. Trouvez une relation simple entre la trace de s et le déterminant de $\exp s$.

A2) Supposant toujours s diagonalisable, on s'intéresse à l'application qui à tout nombre réel t associe exp(ts).

A2a) Démontrez que c'est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif des endomorphismes bijectifs de E, c'est-à-dire :
$\exp(\alpha+\beta)s = \exp(\alpha s).\exp(\beta s)$, quels que soient α et β dans R.

A2b) Démontrez que c'est une application continue de $\mathbb{R}$ dans L(E).

A3) Soit s un endomorphisme de E diagonalisable dans la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et soit f un endomorphisme inversible de E ; on pose $s' = fsf^{-1}$ et $B' = (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$. Comparez s_B et $s'_{B'}$, matrices de s et s' dans les bases B et B' respectivement, et déduisez-en que $$\exp(fsf^{-1}) = f(\exp s)f^{-1}.$$

A4) Dans les deux questions suivantes A4a et A4b, s est toujours diagonalisable, et l'on suppose connus ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ (nombres réels distincts) et les sous-espaces propres associés $E_1, E_2, \ldots E_r$.

A4a) Est-il toujours vrai que tout vecteur propre de s^2 est aussi vecteur propre de s ? Si s^2 est diagonalisable dans une certaine base de E, s est-il nécessairement diagonalisable dans cette même base ?

A4b) Est-il toujours vrai que tout vecteur propre de $\exp s$ est aussi vecteur propre de s ? Si $\exp s$ est diagonalisable dans une certaine base de E, s est-il nécessairement diagonalisable dans cette même base ?

A5) Démontrez que l'application $s \mapsto \exp s$ détermine une bijection de S sur S^+. Si u est dans S^+, vous pourrez noter $\log u$ son image réciproque dans S (même si en dehors de S il existe d'autres images réciproques non diagonalisables).

B) Factorisation des endomorphismes inversibles.

B1) On rapporte E à une base orthonormée B ; si f est un endomorphisme de E, on note f* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est la transposée de f_B, matrice de f.

B1a) Démontrez que, quels que soient x et y dans E, on a l'égalité de produits scalaires $x.f(y) = f^*(x).y$.
Vous devez démontrer cette égalité même si elle figure dans votre cours de mathématiques.

B1b) Quels sont les endomorphismes g tels que $g^*g = i$?

B2) Soit s dans S ; on lui associe la forme [redacted] Q_S telle que $Q_S(x) = s(x).x$ pour tout x dans E. Démontrez que s est dans S^+ si et seulement si Q_S est définie positive.

B3) Démontrez que f^*f est dans S^+ chaque fois que f est un endomorphisme inversible de E.

B4) Soit toujours f un endomorphisme inversible de E.

B4a) On suppose que f est égal à un produit $g \exp s$, avec g dans G et s dans S ; démontrez que $\exp(2s) = f^*f$.

B4b) Démontrez qu'il existe un unique couple (g,s) dans $G \times S$ tel que $f = g \exp s$.

B5) Soit f un endomorphisme de E tel que $\|f(x)\| \geq \|x\|$ pour tout x dans E ; démontrez que la valeur absolue du déterminant de f est supérieure ou égale à 1.