

PREMIERE PARTIE

1a) Le sujet donnant la réponse il est possible de procéder par récurrence . On peut aussi trouver la somme même si le sujet ne donne pas la réponse. On introduit

$$U_n = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \exp(ipt)$$

et on doit calculer la partie réelle de U_n sachant $\exp(it) \neq 1$ car $t \in]0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2} + e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}}, \text{ somme partielle d'une série géométrique de raison } q \neq 1 \\ &= \frac{1}{2} + e^{it} \frac{\sin(nt/2)e^{int/2}}{\sin(t/2)e^{it/2}} \text{ par la transformation } e^{ix} - 1 = 2i \sin(x)e^{ix/2} \\ &= \frac{1}{2} + e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos(pt) = \frac{1}{2} + \frac{\cos((n+1)t/2) \sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$$

or $\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\boxed{\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n \cos(pt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)}}$$

Les cubes , plus habitués aux séries de Fourier ont du partir de $\frac{1}{2} \sum_{p=-n}^n \exp(ipt)$

1b) On intègre l'inégalité précédente entre x et π et on prend l'opposé.

$$\boxed{\frac{x-\pi}{2} + \sum_{p=1}^n \frac{\sin(px)}{p} = \int_x^\pi \frac{-\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} dt}$$

2) Il n'y a pas convergence simple de $f_n(t) = f(t)e^{int}$. Mais l'hypothèse C^1 doit vous inciter à faire une intégration par partie en supposant $n \geq 1$:

$$\int_a^b f(t)e^{int} dt = \frac{f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}}{in} - \int_a^b \frac{f'(t)e^{int}}{in} dt$$

d'où

$$\left| \int_a^b f(t)e^{int} dt \right| = \frac{|f(b)| + |f(a)|}{n} + \frac{1}{n} \int_a^b |f'(t)| dt$$

D'après l'inégalité triangulaire sur les modules et la relation $\left| \int_a^b g \right| \leq \int_a^b |g|$ si $a \leq b$.

L'expression précédente tend vers 0 .

$$\boxed{\lim_{+\infty} \left(\int_a^b f(t)e^{int} dt \right) = 0}$$

Rq1: on peut aussi utiliser la convergence dominée pour la limite de $\int_a^b \frac{f'(t)e^{int}}{in} dt$

Rq 2 : le résultat $\lim \left(\int_a^b f(t)e^{int} dt \right) = 0$ reste vrai si la fonction est seulement continue par morceaux. Il faut alors vérifier le résultat par calcul de primitives si la fonction est en escalier , puis utiliser le fait que toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme de fonctions en escalier.

3) la question revient à montrer :

$$\lim_{+\infty} \left(\int_x^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} dt \right) = 0$$

Ca ressemble à la partie imaginaire de la question précédente ...mais $n + 1/2$ n'est pas entier :

méthode 1: refaire la question précédente avec un x réel et calculer $\lim_{+\infty} \phi(x)$ avec $\phi(x) = \left(\int_a^b f(t)e^{ixt} dt \right)$

méthode 2: faire un changement de variable affine $u = 2t$

$$\int_x^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)} dt = \int_{x/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)u)}{2 \sin(u)} du = \text{Im} \left(\int_{x/2}^{\pi/2} \frac{e^{(2n+1)u}}{2 \sin(u)} du \right)$$

si $x < \pi/2$ on peut utiliser le résultat précédent avec $a = x/2$, $b = \pi/2$, $f = \frac{1}{2 \sin}$ fonction $\in C^1([a, b], \mathbb{R})$ le dénominateur étant C^1 sans racine sur $[a, b]$.

si $x = \pi/2$ le résultat est évident car l'intégrale à étudier est nulle.

si $x > \pi/2$ on prend $a = \pi/2$, $b = x/2$ et on étudie l'opposé de l'expression à étudier.

$$\boxed{\forall x \in]0, 2\pi[, \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{x-\pi}{2}}$$

Rq1: les cubes peuvent reconnaître une série de Fourier qui peut se retrouver en calculant $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2} \sin(nt) dt$ et $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x-\pi}{2} \cos(nt) dt$ et en utilisant le théorème (admis) de convergence simple de la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux. On démontre donc ce résultat dans un cas particulier.

Rq2: il est évident que $\lim_0 \left(\sum_{p=1}^n \frac{\sin(px)}{p} \right) = \lim_0 (0) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = \lim_0 \left(\frac{x-\pi}{2} \right)$. la suite $\sum_{p=1}^n \frac{\sin(px)}{p}$ ne converge pas uniformément sur $]0, 2\pi[$.

SECONDE PARTIE

1a) On a $D_n(t) = \text{Im} \left(\sum_{p=1}^n \exp(ipt) \right)$. Donc d'après le calcul de la première partie :

$$\forall t \in]0, 2\pi[: D_n(t) = \text{Im} \left(e^{i(n+1)t/2} \frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \right) = \frac{\sin((n+1)t/2) \sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$$

$$D_n(t) = \frac{\cos(t/2) - \cos((n+1/2)t)}{2 \sin(t/2)}$$

car $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b))$

En multipliant par $2 \sin(t/2)$ on a la relation voulue sur $]0, 2\pi[$. Si $x = 0$ ou 2π on a $0 = 0$

$$\boxed{\forall x \in [0, 2\pi] , 2 \sin(x/2) D_n(x) = \cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}$$

$A_n(x)$ se transforme par changement d'indice.

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=1}^n \beta_k D_k(x) - \sum_{k=1}^n \beta_{k+1} D_k(x) = \sum_{i=1}^n \beta_i D_i(x) - \sum_{i=2}^{n+1} \beta_i D_{i-1}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i (D_i(x) - D_{i-1}(x)) = \sum_{i=2}^n \beta_i (\sin(ix) + \beta_1 D_1(x) - \beta_{n+1} D_n(x)) \end{aligned}$$

Or $D_1(x) = \sin(x)$ d'où :

$$\boxed{f_n(x) = A_n(x) + \beta_{n+1} D_n(x)}$$

1b) On a d'après les calculs précédents :

$$\sin(x/2) A_p(x) = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \beta_{k+1}) \sin(x/2) D_k(x) = \sum_{k=1}^n (\beta_{k+1} - \beta_k) \frac{(\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x))}{2}$$

Soit en majorant $|\cos(u)|$ par 1

$$|\sin(x/2) A_p(x)| \leq \sum_{k=1}^n |\beta_{k+1} - \beta_k| = \sum_{k=1}^n (\beta_k - \beta_{k+1}) \text{ car la suite } \beta \text{ décroît et donc } \beta_k - \beta_{k+1} \leq 0$$

or

$$\sum_{k=1}^n (\beta_k - \beta_{k+1}) = \sum_{i=1}^n \beta_i - \sum_{i=2}^{n+1} \beta_i = \beta_1 - \beta_{n+1}$$

et donc comme $\sin(x/2) \geq 0$

$$\boxed{\sin(x/2) |A_p(x)| \leq \beta_1 - \beta_{n+1}}$$

le même calcul avec $A_n(x) - A_p(x) = \sum_{k=p+1}^n (\beta_k - \beta_{k+1}) D_k(x)$ donne

$$\boxed{\sin(x/2) |A_n(x) - A_p(x)| \leq \beta_{p+1} - \beta_{n+1}}$$

On en déduit la majoration de $f_n(x) - f_p(x)$:

$$\begin{aligned} \sin(x/2) |f_n(x) - f_p(x)| &= \sin(x/2) (A_n(x) - A_p(x) + \beta_{n+1} D_n(x) - \beta_{p+1} D_p(x)) \\ &\leq (\beta_{p+1} - \beta_{n+1}) + \beta_{p+1} + \beta_{n+1} \text{ car } \sin(x/2) |D_n(x)| \leq 1 \text{ d'après 1a)} \end{aligned}$$

2) On a donc pour $x \in]0, 2\pi[$

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(x/2)}$$

la suite $\frac{2\beta_{p+1}}{\sin(x/2)}$ est une suite majorante, indépendante de n et qui tend vers zéro si p tend vers $+\infty$. La suite $(f_n(x))$ est donc une suite de Cauchy. Elle est donc convergente.

pour $x = 0$ ou $x = 2\pi$ on a de façon évidente $f(0) = f(2\pi) = 0$

Rq : les notations ne sont pas celles du cours dans ce problème p est le petit indice et $n = p + r$ le grand.

D'après la majoration précédente on a sur $[\alpha; 2\pi - \alpha]$ en minorant le dénominateur par $\sin(\alpha/2)$

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(\alpha/2)}$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$:

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(\alpha/2)}$$

la suite $\frac{2\beta_{p+1}}{\sin(\alpha/2)}$ est une suite majorante, indépendante de x et de limite nulle. On en déduit la convergence uniforme sur $[\alpha; 2\pi - \alpha]$.

$$\boxed{f_n \text{ converge simplement sur } [0, 2\pi] \text{ avec convergence uniforme sur } [\alpha; 2\pi - \alpha]}$$

On en déduit que f est continue sur $]0, 2\pi[$. En effet si $x \in]0, \pi[$ la convergence uniforme sur un intervalle contenant x (par exemple $[x/2, 2\pi - x/2]$) assure la continuité en x . De même si $x \in]\pi, 2\pi[$ on peut trouver un segment du type $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ contenant x en choisissant α tel que $x < 2\pi - \alpha < 2\pi$

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]0, 2\pi[}$$

Rq: l'exemple de la première partie montre qu'il peut ne pas y avoir continuité en 0.

Rq: La fonction f peut même ne pas être continue par morceaux. Exemple $\sum \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$. Preuve 5/2: si la fonction est continue par morceaux les coefficients de Fourier sont les $\frac{1}{\sqrt{k}}$ et d'après Parseval $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ converge absurde

TROISIEME PARTIE

1) On a d'après la première partie :

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 2\pi \\ \frac{x-\pi}{2} & \text{sur }]0, \pi[\end{cases}$$

La fonction S n'est pas continue en zéro. Par contre elle est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ car sa restriction à $]0, 2\pi[$ est continue et admet des limites en 0^+ et $2\pi^-$.

2a) De l'inégalité classique sur \mathbb{R}^+ : $\sin(u) \leq u$ on déduit :

$$\sum_{k=1}^p \frac{\sin(kx)}{k} \leq \sum_{k=1}^p x = px \leq \pi \text{ par définition de } p$$

2b) D'après la relation du IIIb avec $\beta_n = \frac{1}{n}$ on a

$$\left| \sum_{k=p+1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| = |f_n(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(x/2)} = \frac{2}{(p+1)\sin(x/2)}$$

Or par définition de p on a $p+1 \geq \frac{\pi}{x}$ donc $(p+1)\sin(x/2) \geq \frac{\pi}{x}\sin(x/2)$.

Or la fonction \sin est concave sur $[0, \pi/2]$ le graphe de \sin est donc au dessus de la corde joignant $(0, 0)$ à $(\pi/2, 1)$ d'équation $y = \frac{2}{\pi x}$ donc pour $x \in]0, \pi[$ $\sin(x/2) \geq \frac{x}{\pi}$. On a donc $(p+1)\sin(x/2) \geq 1$. Et donc comme le dénominateur est minoré :

$$\left| \sum_{k=p+1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq 2$$

2c) En ajoutant les deux inégalités $\left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq 2 + \pi$.

La relation est évidente si $x = 0$ ou π : $0 \leq 2 + \pi$.

Elle est alors évidente sur $[-\pi, 0]$ par imparité du \sin

Elle est alors évidente sur \mathbb{R} par période.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \right| \leq 2 + \pi}$$

3) Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{b_k(f)}{k} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin(kt)}{k} dt$. Comme la somme est finie on peut utiliser la linéarité de l'intégrale: $u_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(t) dt$ avec $\phi_n(t) = f(t) \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kt)}{k}$. Pour conclure il faut passer à la limite dans l'expression précédente. Sous réserve de théorème :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k(f)}{k} = \lim_{+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) S(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt$$

Comme f est continue, ϕ_n est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction continue par morceaux Sf .

De plus $|\phi_n(t)| \leq (2 + \pi)f(t)$ fonction majorante, indépendante de n et continue sur $[0, 2\pi]$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite ϕ_n .

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k(f)}{k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt}$$

Remarque cube : il n'est pas évident de prouver que $\sum \int_0^{2\pi} \left| f(t) \frac{\sin(kt)}{k} \right| dt$ converge et le théorème usuel d'intégration termes à termes d'une série ne s'applique pas. Le sujet avait bien préparé le terrain pour vous orienté vers une C.V.D.

4a) Si $f(t) = t$ une intégration par partie donne $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t \sin(nt) dt = -\frac{2}{n}$. On a donc :

$$-2 \sum_{kj=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi t - t^2) dt = -\frac{\pi^2}{3}$$

Soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

4b) Si $f(t) = \exp(ixt)$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{ixt} \sin(nt) dt = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{i(x+n)t} + e^{i(x-n)t} \right) dt \\ &= \frac{n(\exp(2i\pi x) - 1)}{\pi(x^2 - n^2)} \text{ dénominateur non nul car } x \notin \mathbb{Z} \end{aligned}$$

D'autre part par intégration par partie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) e^{itx} dt = \frac{e^{2i\pi x} (i\pi x - 1) + (i\pi x + 1)}{2\pi x^2} = \frac{i\pi x (e^{2i\pi x} + 1) - (e^{2i\pi x} - 1)}{2\pi x^2}$$

D'où :

$$\frac{e^{2i\pi x} - 1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2 - n^2} = \frac{i\pi x (e^{2i\pi x} + 1) - (e^{2i\pi x} - 1)}{2\pi x^2}$$

soit par changement de membre et multiplication par 2 :

$$\frac{e^{2i\pi x} - 1}{\pi} \left(\frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{x^2 - n^2} \right) = \frac{i(e^{2i\pi x} + 1)}{x}$$

Soit

$$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{\pi i (e^{2i\pi x} + 1)}{(e^{2i\pi x} - 1)} = \frac{\pi i e^{i\pi x} (2 \cos(\pi x))}{e^{i\pi x} (2i \sin(\pi x))} = \pi \cotan(\pi x)$$

$$\boxed{\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi \cotan(\pi x)}$$

Rq : développement eulérien de cotan que vous avez peut-être déjà rencontré.

4c) On a donc

$$\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} = \pi \cotan(\pi x)$$

et en remplaçant x par $x/2$:

$$\frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - n^2} = \pi \cotan\left(\pi \frac{x}{2}\right)$$

Soit

$$\pi \cotan\left(\pi \frac{x}{2}\right) = \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4x}{(x)^2 - (2n)^2}$$

Soit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - (2k+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - (2n)^2} \\ &= \left(\pi \cotan(\pi x) - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} \left(\pi \cotan \frac{\pi x}{2} - \frac{2}{x} \right) \\ &= \pi \cotan(\pi x) - \frac{\pi}{2} \cotan\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$

QUATRIEME PARTIE

1)

- pour $x = 0$ l'intégrabilité est évidente
- pour $x > 0$ $t \mapsto \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)}$ est une fonction continue positive sur \mathbb{R}^{+*} de limite x si t tend vers zéro et équivalente à $\frac{e^{xt}}{e^t} = e^{(x-1)t}$ si t tend vers l'infini. La fonction est intégrable si et seulement si $x < 1$.
- pour $x < 0$ la parité de la fonction permet de conclure sans problème.

$$\mathcal{D} =]-1, 1[$$

2a) On a $\frac{1}{\text{sh}(t)} = \frac{2}{e^t - e^{-t}} = \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}}$. pour $t > 0$ on a $e^{-2t} \in]0, 1[$ donc $\frac{1}{1 - e^{-2t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kt}$ En multipliant par $2e^{-t}$ on a $\frac{1}{\text{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2e^{-(2k+1)t}$. Et par multiplication par $\text{sh}(xt)$

$$\forall t > 0, \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2 \text{sh}(xt) e^{-(2k+1)t}$$

2b) $t \mapsto 2 \text{sh}(xt) e^{-(2k+1)t}$ est une fonction continue positive sur \mathbb{R}^+ équivalente à $e^{(x-2k-1)t}$ en $+\infty$. Sur \mathcal{D} ($x - 2k - 1$) est strictement négatif. D'où l'intégrabilité de la fonction.

2c) Sur \mathbb{R}^{+*} $\sum 2 \text{sh}(xt) e^{-(2k+1)t}$ est une série de fonctions continues intégrables qui convergent vers une fonction continue intégrable. Chaque terme de la somme est positif, donc la suite des sommes partielles est monotone et par convergence monotone :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} dt &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2 \text{sh}(xt) e^{-(2k+1)t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(e^{(x-2k-1)t} - e^{-(x-2k-1)t} \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x - (2k+1))} - \frac{1}{-x - (2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2k+1)^2 - x^2} \end{aligned}$$

3) Pour $x \in \mathcal{D} - \mathbb{Z}$ on a donc:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2k+1)^2 - x^2} = -\pi \cotan(\pi x) + \frac{\pi}{2} \cotan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

d'après la troisième partie. Or $\cotan(\pi x/2) = \frac{1}{\tan(\pi x/2)}$ et $\cotan(\pi x) = \frac{1}{\tan(\pi x)} = \frac{1 - \tan^2(\pi x/2)}{2 \tan(\pi x/2)}$. La trigonométrie simplifie donc l'expression.

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \mathbb{Z}, \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} dt = \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

pour $x = 0$ l'égalité est évidente.

CINQUIEME PARTIE

1a) la fonction ϕ_m est continue, positive sur \mathbb{R}^{+*} , prolongeable par continuité en $x = 0$ ($\phi_1(0) = 1, \phi_m(0) = 0$ si $m > 1$) et $t^2 \phi_m \sim 2t^{m+2} e^{-t} \rightarrow_{+\infty} 0$. La fonction ϕ_m est intégrable sur \mathbb{R}^{+*}

1b) Comme au IV 1) on a

$$\phi_m(t) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} t^m e^{-(2k+1)t}$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty} t^m e^{-(2k+1)t}$ est une série de fonctions continues intégrables sur \mathbb{R}^{+*} (car $t^2 t^m e^{-(2k+1)t}$ tend vers 0) qui converge simplement vers ϕ_m continue intégrable sur \mathbb{R}^{+*} . De plus chaque fonction $t \mapsto t^m e^{-(2k+1)t}$ est positive. La suite des sommes partielles est donc monotone et on peut lui appliquer le théorème de convergence monotone.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\text{sh}(t)} dt = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^m e^{-(2p+1)t} dt$$

1c) On doit donc calculer $\int_0^{+\infty} t^m e^{-(2p+1)t} dt$. Or le changement de variable affine $u = (2p+1)t$ permet de retrouver la fonction Γ d'Euler : $\int_0^{+\infty} t^m e^{-(2p+1)t} dt = \frac{\Gamma(m+1)}{(2p+1)^{m+1}} = \frac{m!}{(2p+1)^{m+1}}$. donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\text{sh}(t)} dt = 2m! \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{m+1}}$$

Il faut revenir à la fonction ξ de Riemann : Or

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{m+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{m+1}} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^{m+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{m+1}} - \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(2q)^{m+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) \xi(m+1)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\text{sh}(t)} dt = 2m! (1 - 2^{-m-1}) \xi(m+1)}$$

2) $v_p = \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \phi_{2p+1}$ est intégrable car proportionnelle à une fonction intégrable. De plus

$$\int_0^{+\infty} v_p(t) dt = \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \int_0^{+\infty} \phi_{2p+1}(t) dt = 2x^{2p+1} (1 - 2^{-2p-2}) \xi(2p+2)$$

3) On connaît le développement en série entière avec un rayon de convergence infini :

$$\text{sh}(xt) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(xt)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Donc $\frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} = \sum_{p=0}^{+\infty} v_p(t)$. La série de fonction $\sum v_p(t)$ est une série de fonctions continues intégrables sur \mathbb{R}^{+*} qui converge simplement vers une fonction continue intégrable. De plus $\sum_{p=0}^{+\infty} |v_p| = \sum_{p=0}^{+\infty} 2|x|^{2p+1} (1 - 2^{-2p-2}) \xi(2p+2)$ est une série convergente car $0 \leq 2|x|^{2p+1} (1 - 2^{-2p-2}) \xi(2p+2) \leq (2\xi(2)) |x|^{2p+1}$ qui est le terme général d'une série convergente car $|x| < 1$. (la série n'est pas à termes positifs si $x < 0$) On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} 2x^{2p+1} (1 - 2^{-2p-2}) \xi(2p+2)$$

4a) Si on réunit ce résultat avec la fin de la partie IV on a :

$$\forall x \in]-1, 1[: \frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2x^{2p+1} (1 - 2^{-2p-2}) \xi(2p+2)$$

soit en posant $u = \pi x/2$

$$\boxed{\forall u \in]-\pi/2, \pi/2[: \tan(u) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{u^{2p+1}}{\pi^{2p+1}} (2^{2p+2} - 1) \xi(2p+2)}$$

4b) on connaît le début du développement asymptotique de \tan :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

donc pour $p=0$: $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\pi} (4-1) \xi(2) = 1$ soit $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$

et pour $p=1$: $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\pi^3} (16-1) \xi(4) = \frac{1}{3}$ soit $\xi(4) = \frac{\pi^4}{90}$

et pour $p=2$: $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\pi^5} (64-1) \xi(6) = \frac{2}{15}$ soit $\xi(6) = \frac{\pi^6}{945}$

remarque : en posant $\tan(x) \cos(x) = \sin(x)$ et en utilisant un produit de Cauchy on montre facilement que les coefficients du développement en série de \tan sont rationnels. On en déduit lors que $\frac{\xi(2p)}{\pi^{2p}}$ est rationnel

$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^8 = \frac{1}{9450} \pi^8$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{10} = \frac{1}{93555} \pi^{10}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{12} = 691/638512875 \pi^{12}$ d'après MAPLE qui a une table des valeurs.