ESIGELEC
série MP
concours 2000

PREMIERE PARTIE

1a) Le sujet donnant la réponse il est possible de procéder par récurrence . On peut aussi trouver la somme même si le sujet ne donne pas la réponse. On introduit

$$U_n = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \exp(ipt)$$

et on doit calculer la partie réelle de U_n sachant $exp(it) \neq 1$ car $t \in]0, 2\pi[$

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{1}{2} + e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}} \text{ , somme partielle d'une série géométrique de raison } q \neq 1 \\ &= \frac{1}{2} + e^{it}\frac{\sin(nt/2)e^{int/2}}{\sin(t/2)e^{it/2}} \text{ par la transformation } e^{ix} - 1 = 2i\sin(x)e^{ix/2} \\ &= \frac{1}{2} + e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)} \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos(pt) = \frac{1}{2} + \frac{\cos((n+1)t/2)\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$$

or $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\boxed{\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos(pt) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}}$$

Les cubes , plus habitués aux séries de Fourier ont du partir de $\frac{1}{2}\sum_{p=-n}^{n} \exp(ipt)$

1b) On intègre l'inégalité précédente entre x et π et on prend l'opposé.

$$\boxed{\frac{x-\pi}{2} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\sin(px)}{p} = \int_x^\pi \frac{-\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}dt}$$

2) Il n'y a pas convergence simple de $f_n(t) = f(t)e^{int}$. Mais l'hypothèse C^1 doit vous inciter à faire une intégration par partie en supposant $n \geq 1$:

$$\int_a^b f(t)e^{int}dt = \frac{f(b)e^{inb} - f(a)e^{ina}}{in} - \int_a^b \frac{f'(t)e^{int}}{in}dt$$

d'où

$$\left|\int_a^b f(t)e^{int}dt\right| = \frac{|f(b)| + |f(a)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,dt$$

D'après l'inégalité triangulaire sur les modules et la relation $\left|\int_a^b g\right| \leq \int_a^b |g|$ si $a \leq b$.

L'expression précédente vend vers 0 .

$$\boxed{\lim_{+\infty}\left(\int_a^b f(t)e^{int}dt\right) = 0}$$

Rq1: on peut aussi utiliser la convergence dominée pour la limite de $\int_a^b \frac{f'(t)e^{int}}{in}dt$

Rq 2 : le résultat $\lim\left(\int_a^b f(t)e^{int}dt\right) = 0$ *reste vrai si la fonction est seulement continue par morceaux. Il faut alors vérifier le résultat par calcul de primitives si la fonction est en escalier , puis utiliser le fait que toute fonction continue par morceaux sur un segment y est limite uniforme de fonctions en escalier.*

3) la question revient à montrer :

$$\lim_{+\infty}\left(\int_x^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}dt\right) = 0$$

Ca ressemble à la partie imaginaire de la question précédente ...mais $n + 1/2$ n'est pas entier :

<u>méthode 1</u>: refaire la question précédente avec un x réel et calculer $\lim_{+\infty} \phi(x)$ avec $\phi(x) = \left(\int_a^b f(t)e^{ixt}dt\right)$

<u>méthode 2</u>:faire un changement de variable affine $u = 2t$

$$\int_x^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}dt = \int_{x/2}^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)u)}{2\sin(u)}du = \mathrm{Im}\left(\int_{x/2}^{\pi/2} \frac{e^{(2n+1)u}}{2\sin(u)}du\right)$$

si $x < \pi/2$ on peut utiliser le résultat précédent avec $a = x/2$, $b = \pi/2$, $f = \frac{1}{2\sin}$ fonction $\in C^1([a,b], \mathbb{R})$ le dénominateur étant C^1 sans racine sur $[a, b]$.

si $x=\pi/2$ le résultat est évident car l'intégrale à étudier est nulle.
si $x>\pi/2$ on prend $a=\pi/2$, $bx/2$ et on étudie l'opposé de l'expression à étudier.

$$\boxed{\forall x\in]0,2\pi[\ ,\ \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\sin(px)}{p}=\frac{x-\pi}{2}}$$

Rq1: les cubes peuvent reconnaître une série de Fourier qui peut se retrouver en calculant $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x-\pi}{2}\sin(nt)dt$ *et* $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x-\pi}{2}\cos(nt)dt$ *et en utilisant le théorème (admis) de convergence simple de la série de Fourier d'une fonction continue par morceaux. On démontre donc ce résultat dans un cas particulier.*
Rq2: il est évident que $\lim_0\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}\right)=\lim_0(0)=0\neq\frac{\pi}{2}=\lim_0\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$. la suite $\sum_{p=1}^{n}\frac{\sin(px)}{p}$ ne converge pas uniformément sur $]0,2\pi[$.

SECONDE PARTIE

1a) On a $D_n(t)=\operatorname{Im}\left(\sum_{p=1}^{n}\exp(ipt)\right)$. Donc d'après le calcul de la première partie :

$$\forall t\in]0,2\pi[: D_n(t)=\operatorname{Im}\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)=\frac{\sin((n+1)t/2)\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}$$

$$D_n(t)=\frac{\cos(t/2)-\cos((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}$$

car $\sin(a)\sin(b)=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
En multipliant par $2\sin(t/2)$ on a la relation voulue sur $]0,2\pi[$. Si $x=0$ ou 2π on a $0=0$

$$\boxed{\forall x\in[0,2\pi]\ ,2\sin(x/2)D_n(x)=\cos(x/2)-\cos((n+1/2)x)}$$

$A_n(x)$ se transforme par changement d'indice.

$$\begin{aligned}A_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}\beta_kD_k(x)-\sum_{k=1}^{n}\beta_{k+1}D_k(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_iD_i(x)-\sum_{i=2}^{n+1}\beta_iD_{i-1}(x)\\&=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left(D_i(x)-D_{i-1}(x)\right)=\sum_{i=2}^{n}\beta_i\left(\sin(ix)+\beta_1D_1(x)-\beta_{n+1}D_n(x)\right)\end{aligned}$$

Or $D_1(x)=\sin(x)$ d'où :

$$\boxed{f_n(x)=A_n(x)+\beta_{n+1}D_n(x)}$$

1b) On a d'après les calculs précédents :

$$\sin(x/2)A_p(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right)\sin(x/2)D_k(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(\beta_{k+1}-\beta_k\right)\frac{(\cos(x/2)-\cos((n+1/2)x))}{2}$$

Soit en majorant $|\cos(u)|$ par 1

$$|\sin(x/2)A_p(x)|\leq\sum_{k=1}^{n}\left|\beta_{k+1}-\beta_k\right|=\sum_{k=1}^{n}\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right)\text{ car la suite }\beta\text{ décroît et donc }\beta_k-\beta_{k+1}\leq 0$$

or

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i-\sum_{i=2}^{n+1}\beta_i=\beta_1-\beta_{n+1}$$

et donc comme $\sin(x/2)\geq 0$

$$\boxed{\sin(x/2)\left|A_p(x)\right|\leq\beta_1-\beta_{n+1}}$$

le même calcul avec $A_n(x)-A_p(x)=\sum_{kp+1}^{n}\left(\beta_k-\beta_{k+1}\right)D_k(x)$ donne

$$\boxed{\sin(x/2)\left|A_n(x)-A_p(x)\right|\leq\beta_{p+1}-\beta_{n+1}}$$

On en déduit la majoration de $f_n(x)-f_p(x)$:

$$\begin{aligned}\sin(x/2)\left|f_n(x)-f_p(x)\right|&=\sin(x/2)\left(A_n(x)-A_p(x)+\beta_{n+1}D_n(x)-\beta_{p+1}D_p(x)\right)\\&\leq\left(\beta_{p+1}-\beta_{n+1}\right)+\beta_{p+1}+\beta_{n+1}\text{ car }\sin(x/2)\left|D_n(x)\right|\leq 1\text{ d'après }\mathbf{1a)}\end{aligned}$$

2) On a donc pour $x \in]0, 2\pi[$

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(x/2)}$$

la suite $\frac{2\beta_{p+1}}{\sin(x/2)}$ est une suite majorante , indépendante de n et qui tend vers zéro si p tend vers $+\infty$. La suite $(f_n(x))$ est donc une suite de Cauchy . Elle est donc convergente.
pour $x = 0$ ou $x = 2\pi$ on a de façon évidente $f(0) = f(2\pi) = 0$
Rq : les notations ne sont pas celles du cours dans ce problème p est le petit indice et $n = p + r$ le grand.
D'après la majoration précédente on a sur $[\alpha; 2\pi - \alpha]$ en minorant le dénominateur par $\sin(\alpha/2)$

$$|f_n(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(\alpha/2)}$$

Si on fait tendre n vers $+\infty$:

$$|f(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(\alpha/2)}$$

la suite $\frac{2\beta_{p+1}}{\sin(\alpha/2)}$ est une suite majorante , indépendante de x et de limite nulle . On en déduit a convergence uniforme sur $[\alpha; 2\pi - \alpha]$.

$$\boxed{f_n \text{ converge simplement sur } [0, 2\pi] \text{ avec convergence uniforme sur } [\alpha; 2\pi - \alpha]}$$

On en déduit que f est continue sur $]0, 2\pi[$. En effet si $x \in]0, \pi]$ la convergence uniforme sur un intervalle contenant x (par exemple $[x/2, 2\pi - x/2]$) assure la continuité en x . De même si $x \in]\pi, 2\pi[$ on peut trouver un segment du type $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ contenant x en choisissant α tel que $x < 2\pi - \alpha < 2\pi$

$$\boxed{f \text{ est continue sur }]0, 2\pi[}$$

Rq: l'exemple de la première partie montre qu'il peut ne pas y avoir continuité en 0.
Rq:La fonction f peut même ne pas être continue par morceaux.Exemple $\sum \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$. Preuve 5/2:si la fonction est continue par morceaux les coefficients de Fourier sont les $\frac{1}{\sqrt{k}}$ et d'après Parseval $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$ converge absurde

TROISIEME PARTIE

1)On a d'après a première partie :

$$S(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \text{ ou } 2\pi \\ \frac{x-\pi}{2} \text{ sur }]0, \pi[\end{cases}$$

La fonction S n'est pas continue en zéro. Par contre elle est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ car sa restriction à $]0, 2\pi[$ est continue et admet des limites en 0^+ et $2\pi^-$.
2a) De l'inégalité classique sur $\mathbb{R}^+$: $sin(u) \leq u$ on déduit :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\sin(kx)}{k} \leq \sum_{k=1}^{p} x = px \leq \pi \text{ par définition de } p$$

2b) D'après a relation du II1b avec $\beta_n = \frac{1}{n}$ on a

$$\left|\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| = |f_n(x) - f_p(x)| \leq \frac{2\beta_{p+1}}{\sin(x/2)} = \frac{2}{(p+1)\sin(x/2)}$$

Or par définition de p on a :$p + 1 \geq \frac{\pi}{x}$ donc $(p + 1)\sin(x/2) \geq \frac{\pi}{x}\sin(x/2)$.
Or la fonction sin est concave sur $[0, \pi/2]$ le graphe de sin est donc au dessus de la corde joignant $(0, 0)$ à $(\pi/2, 1)$ d'équation $y = \frac{2}{\pi x}$ donc pour $x \in]0, \pi[$ $\sin(x/2) \geq \frac{x}{\pi}$ .On a donc $(p + 1)\sin(x/2) \geq 1$. Et donc comme le dénominateur est minoré :

$$\left|\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq 2$$

2c) En ajoutant les deux inégalités $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq 2 + \pi$.
La relation est évidente si $x = 0$ ou π : $0 \leq 2 + \pi$..
Elle est alors évidente sur $[-\pi, 0]$ par imparité du sin
Elle est alors évidente sur $\mathbb{R}$ par période.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\right| \leq 2 + \pi}$$

3) Soit $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k(f)}{k}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\sin(kt)}{k}dt$. Comme la somme est finie on peut utiliser la linéarité de l'intégrale:$u_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kt)}{k}dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_n(t)dt$. avec $\phi_n(t)=f(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kt)}{k}$. Pour conclure il faut passer à la limite dans l'expression précédente . Sous réserve de théorème :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k(f)}{k}=\lim_{+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)S(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)f(t)dt$$

Comme f est continue, ϕ_n est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction continue par morceaux Sf.
De plus $|\phi_n(t)|\leq(2+\pi)f(t)$ fonction majorante , indépendante de n et continue sur $[0,2\pi]$.
On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite ϕ_n .

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{b_k(f)}{k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)f(t)dt}$$

Remarque cube : il n'est pas évident de prouver que $\sum\int_0^{2\pi}\left|f(t)\frac{\sin(kt)}{k}\right|dt$ *converge et le théorème usuel d'intégration termes à termes d'une série ne s'applique pas. Le sujet avait bien préparé le terrain pour vous orienté vers une C.V.D.*

4a) Si $f(t)=t$ une intégration par partie donne $b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}t\sin(nt)dt=-\frac{2}{n}$. On a donc :

$$-2\sum_{kj=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\pi t-t^2\right)dt=-\frac{\pi^2}{3}$$

Soit

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

4b) Si $f(t)=\exp(ixt)$,

$$\begin{aligned}b_n(f)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}e^{(ixt)}\sin(nt)dt=\frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{i(x+n)t}+e^{i(x-n)t}\right)dt\\&=\frac{n\left(\exp(2i\pi x)-1\right)}{\pi\left(x^2-n^2\right)}\text{ dénominateur non nul car } x\notin\mathbb{Z}\end{aligned}$$

D'autre part par intégration par partie :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-t)e^{itx}dt=\frac{e^{2i\pi x}\left(i\pi x-1\right)+\left(i\pi x+1\right)}{2\pi x^2}=\frac{i\pi x\left(e^{2i\pi x}+1\right)-\left(e^{2i\pi x}-1\right)}{2\pi x^2}$$

D'où :

$$\frac{e^{2i\pi x}-1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^2-n^2}=\frac{i\pi x\left(e^{2i\pi x}+1\right)-\left(e^{2i\pi x}-1\right)}{2\pi x^2}$$

soit par changement de membre et multiplication par 2 :

$$\frac{e^{2i\pi x}-1}{\pi}\left(\frac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{x^2-n^2}\right)=\frac{i\left(e^{2i\pi x}+1\right)}{x}$$

Soit

$$\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}=\frac{\pi i(e^{2i\pi x}+1)}{(e^{2i\pi x}-1)}=\frac{\pi ie^{i\pi x}\left(2\cos(\pi x)\right)}{e^{i\pi x}\left(2i\sin(\pi x)\right)}=\pi\operatorname{cotan}(\pi x)$$

$$\boxed{\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}=\pi\operatorname{cotan}(\pi x)}$$

Rq : développement eulérien de cotan *que vous avez peut-être déjà rencontré.*

4c) On a donc

$$\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}=\pi\operatorname{cotan}(\pi x)$$

et en remplaçant x par $x/2$:

$$\frac{2}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2-n^2}=\pi\operatorname{cotan}(\pi\frac{x}{2})$$

Soit

$$\pi\operatorname{cotan}(\pi\frac{x}{2})=\frac{2}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4x}{(x)^2-(2n)^2}$$

Soit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-(2k+1)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-(2n)^2}\\ &= \left(\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\pi\,\mathrm{cotan}\,\frac{\pi x}{2}-\frac{2}{x}\right)\\ & \pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)-\frac{\pi}{2}\,\mathrm{cotan}(\frac{\pi x}{2})\end{aligned}$$

QUATRIEME PARTIE

1)

- pour $x=0$ l'intégrabilité est évidente
- pour $x>0$ $t->\frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)}$ est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de limite x si t tend vers zéro et équivalente à $\frac{e^{xt}}{e^t}=e^{(x-1)t}$ si t tend vers l'infini. La fonction est intégrable si et seulement si $x<1$.
- pou $x<0$ la parité de la fonction permet de conclure sans problème.

$$\boxed{\mathcal{D}=\,]-1,1[}$$

2a) On a $\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}=\frac{2}{e^t-e^{-t}}=\frac{2e^{-t}}{1-e^{-2t}}$. pour $t>0$ on a $e^{-2t}\in]0,1[$ donc $\frac{1}{1-e^{-2t}}=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-2kt}$ En multipliant par $2e^{-t}$ on a $\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}=\sum_{k=0}^{+\infty}2e^{-(2k+1)t}$. Et par multiplication par $\mathrm{sh}(xt)$

$$\forall t>0,\frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)}=\sum_{k=0}^{+\infty}2\,\mathrm{sh}(xt)e^{-(2k+1)t}$$

2b)$t->2\,\mathrm{sh}(xt)e^{-(2k+1)t}$ est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^+$ équivalente à $e^{(x-2k-1)t}$ en $+\infty$. Sur $\mathcal{D}$ $(x-2k-1)$ est strictement négatif. D'où l'intégrabilité de la fonction.
2c) Sur $\mathbb{R}^{+*}$ $\sum 2\,\mathrm{sh}(xt)e^{-(2k+1)t}$ est une série de fonctions continues intégrables qui convergent vers une fonction continue intégrable. Chaque terme de la somme est positif , donc la suite des sommes partielles est monotone et par convergence monotone :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)}dt &= \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{\infty}2\,\mathrm{sh}(xt)e^{-(2k+1)t}dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{(x-2k-1)t}-e^{(-x-2k-1)}\right)dt\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x-(2k+1)}-\frac{1}{-x-(2k+1)}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2x}{(2k+1)^2-x^2}\end{aligned}$$

3) Pour $x\in\mathcal{D}-\mathbb{Z}$ on a donc:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)}dt=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2x}{(2k+1)^2-x^2}=-\pi\,\mathrm{cotan}(\pi x)+\frac{\pi}{2}\,\mathrm{cotan}(\frac{\pi x}{2})$$

d'après la troisième partie. Or $\mathrm{cotan}(\pi x/2)=\frac{1}{\tan(\pi x/2)}$ et $\mathrm{cotan}(\pi x)=\frac{1}{\tan(\pi x)}=\frac{1-\tan^2(\pi x/2)}{2\tan(\pi x/2)}$. La trigonométrie simplifie donc l'expression.

$$\boxed{\forall x\in\mathcal{D}x\neq 0\ ,\ \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)}dt=\frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

pour $x=0$ l'égalité est évidente.

CINQUIEME PARTIE

1a) la fonction ϕ_m est continue , positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en $x=0$ ($\phi_1(0)=1,\phi_m(0)=0$ si $m>1$) et $t^2\phi_m\sim 2^{t^{m+2}e^{-t}}\to_{+\infty}0$. La fonction ϕ_m est intégrable sur R^{+*}
1b) Comme au IV 1) on a

$$\phi_m(t)=2\sum_{k=0}^{+\infty}t^me^{-(2k+1)t}$$

La série $\sum_{k=0}^{+\infty}t^me^{-(2k+1)t}$ est une série de fonctions continues intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ (car $t^2t^me^{-(2k+1)t}$ tend vers 0) qui converge simplement vers ϕ_m continue intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus chaque fonction $t->t^me^{-(2k+1)t}$ est positive . La suite des sommes partielles est donc monotone et on peut lui appliquer le théorème de convergence monotone.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^m}{\mathrm{sh}(t)}dt=2\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^me^{-(2p+1)t}dt}$$

1c) On doit donc calculer $\int_0^{+\infty} t^m e^{-(2p+1)t}dt$. Or le changement de variable affine $u = (2p+1)t$ permet de retrouver la fonction Γ d'Euler : $\int_0^{+\infty} t^m e^{-(2p+1)t}dt = \frac{\Gamma(m+1)}{(2p+1)^{m+1}} = \frac{m!}{(2p+1)^{m+1}}$. donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\operatorname{sh}(t)}dt = 2m!\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{m+1}}$$

Il faut revenir à la fonction ξ de Riemann : Or

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^{m+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{m+1}} - \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{k^{m+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{m+1}} - \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(2q)^{m+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right)\xi(m+1)$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\operatorname{sh}(t)}dt = 2m!\left(1-2^{-m-1}\right)\xi\left(m+1\right)}$$

2) $v_p = \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\phi_{2p+1}$ est intégrable car proportionnelle à une fonction intégrable. De plus

$$\int_0^{+\infty} v_p(t)dt = \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\int_0^{+\infty} \phi_{2p+1}(t)dt = 2x^{2p+1}\left(1-2^{-2p-2}\right)\xi\left(2p+2\right)$$

3) On connaît le développement en série entière avec un rayon de convergence infini :

$$\operatorname{sh}(xt) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(xt)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Donc $\frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh}(t)} = \sum_{p=0}^{+\infty} v_p(t)$. La série de fonction $\sum v_p(t)$ est une série de fonctions continues intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ qui converge simplement vers une fonction continue intégrable. De plus $\sum \int_0^{+\infty} |v_p| = \sum 2\,|x|^{2p+1}\left(1-2^{-2p-2}\right)\xi\left(2p+2\right)$ est une série convergente car $0 \le 2\,|x|^{2p+1}\left(1-2^{-2p-2}\right)\xi\left(2p+2\right) \le \left(2\xi(2)\right)|x|^{2p+1}$ qui est le terme général d'une série convergente car $|x| < 1$.(la série n'est pas à termes positfs si $x < 0$) On peut donc intégrer terme à terme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh}(t)}dt = \sum_{p=0}^{+\infty} 2x^{2p+1}\left(1-2^{-2p-2}\right)\xi\left(2p+2\right)$$

4a) Si on réunit ce résultat avec la fin de la partie IV on a :

$$\forall x \in]-1,1[: \frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi x}{2}) = \sum_{p=0}^{+\infty} 2x^{2p+1}\left(1-2^{-2p-2}\right)\xi\left(2p+2\right)$$

soit en posant $u = \pi x/2$

$$\boxed{\forall u \in]-\pi/2,\pi/2[: \tan(u) = \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^{2p+1}}{\pi^{2p+1}}\left(2^{2p+2}-1\right)\xi(2p+2)}$$

4b) on connaît le début du développement assymptotique de tan :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + ...$$

donc pour $p = 0$:$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\pi}\left(4-1\right)\xi(2) = 1$ soit $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$
et pour $p = 1$: $\frac{2}{\pi}\frac{1}{\pi^3}\left(16-1\right)\xi(4) = \frac{1}{3}$ soit $\xi(4) = \frac{\pi^4}{90}$
et pour $p = 2$: $\frac{2}{\pi}\frac{1}{\pi^5}\left(64-1\right)\xi(6) = \frac{2}{15}$ soit $\xi(6) = \frac{\pi^6}{945}$
remarque : en posant $\tan(x)\cos(x) = \sin(x)$ et en utilisant un produit de Cauchy on montre facilement que les coefficients du développement en série de tan sont rationnels . On en déduit lors que $\frac{\xi(2p)}{\pi^{2p}}$ est rationnel
$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^8 = \frac{1}{9450}\pi^8$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{10} = \frac{1}{93\,555}\pi^{10}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^{12} = 691/638512875\pi^{12}$ d'après MAPLE qui a une table des valeurs.