

Concours E3A
CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES 3 2001

PARTIE I

1a $L(f)$ est une primitive de la fonction continue f , il existe donc une constante C telle que pour tout $t \in [a, b]$: $L(f)(t) = \int_a^t f(u) du + C$.

La relation $\int_a^b L(f)(t) dt = 0$ permet de déterminer $C = -\frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx$. Ce qui prouve que $L(f)$ est bien défini pour tout $f \in E_0$

De plus $L(f)(t) = \int_a^t f(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx$

toute primitive d'une fonction continue est C^1 donc est bien C^0 : f est une application de E_0 dans E_0 .

On montre facilement que $f \mapsto \int_a^t f(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx$ est une application linéaire par linéarité de l'intégrale.

L est un endomorphisme de E_0

1b Soit $f \in \ker L$, alors, $L(f) = 0$. En dérivant, on obtient $f = 0$.

$\ker L = \{0\}$

1c $L(f)$ est dérivable de dérivée f , donc $L(f)$ est de classe C^1 :

$\text{Im } L \subset E_1$

L'endomorphisme $f|_{E_1}$ n'est pas surjectif car les éléments de son image sont de classe C^2 . La restriction de L à E_1 n'est pas un automorphisme de E_1 .

remarque on peut aussi donner un exemple de fonction d'intégrale non nulle sur $[a, b]$

2a On repart de la formule trouvée en 1°. (a):

$$\begin{aligned} L(f)(t) &= \int_a^t f(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^t f(u) du \right) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_a^x f(u) du \right) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u) du \right) dx \end{aligned}$$

$$L(f)(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u) du \right) dx$$

2b $L(f)$ est continue sur le segment $[a, b]$, donc l'image du segment $[a, b]$ est un segment f atteint son minimum en un point $x_i \in [a, b]$ et son maximum en un point $x_s \in [a, b]$. **Pour tout $t \in [a, b]$: $L(f)(x_i) \leq L(f)(t) \leq L(f)(x_s)$.**

2c

$$\begin{aligned} \int_a^b |x-t| dt &= \int_a^x (x-t) dt + \int_x^b (t-x) dt \\ &= x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}. \end{aligned}$$

L'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^2 - (a+b)x + \frac{a^2+b^2}{2}$ permet de montrer que sa borne supérieure est $\frac{(b-a)^2}{2}$, donc

$$\sup_{t \in [a, b]} \int_a^b |t-x| dt = \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\begin{aligned} |L(f)(t)| &= \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^t f(u) du \right) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \int_x^t f(u) du \right| dx \\ &\leq \frac{\|f\|}{b-a} \int_a^b |x-t| dx \leq \frac{b-a}{2} \|f\| \end{aligned}$$

Donc **$\|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2} \|f\|$**

Soit alors $f \in E_0$ et (ϕ_n) une suite de E_0 de limite f_0 on a :

$$\|L(\phi_n) - L(f)\| = \|L(\phi_n - f)\| \leq \frac{b-a}{2} \|\phi_n - f\|$$

On a donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} (L(\phi_n)) = L(f)$ pour toute suite ϕ_n de limite f . Par le critère séquentielle de la limite f est continue en tout élément f de E_0 . L est continue sur E_0

remarque : (linéaire \Rightarrow continue) n'est vrai qu'en dimension finie.

2d $L(P_0)(t) = t + C$ avec $\int_a^b (t + C) dt = 0$ donc $L(P_0)(t) = t - \frac{a+b}{2}$ et $\|L(P_0)\| = \frac{b-a}{2}$

De la relation $\|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2} \|f\|$, on déduit que pour $\|f\| \leq 1$ $\frac{b-a}{2}$ est un majorant de $\|L(f)\|$ et donc $\|L\| \leq \frac{b-a}{2}$.

De plus pour $f = P_0$ on a $\|P_0\| = 1$ et $\|L(P_0)\| = \frac{b-a}{2}$. $\frac{b-a}{2}$ est donc le plus grand élément de $\{\|L(f)\|, \|f\| = 1\}$

On a donc $\|L\| = \frac{b-a}{2}$

PARTIE II

1a $F_1 = \{f \in E_0, \forall t \in [a, b] \quad f(a+b-t) = -f(t)\}$

$F_2 = \{f \in E_0, \forall t \in [a, b] \quad f(a+b-t) = f(t)\}$

L'application $f_1 : t \mapsto (t - \frac{a+b}{2})^3$ est dans F_1 donc F_1 est non vide et non réduit à $\{0\}$.

L'application $f_2 : t \mapsto (t-a)(t-b)$ est dans F_2 donc F_2 est non vide et non réduit à $\{0\}$.

Interprétation géométrique : le graphe des fonctions de F_2 admet un axe de symétrie en $x = (a+b)/2$, celle de F_1 un centre de symétrie en $((a+b)/2, 0)$, d'où l'idée de prendre les primitives nulle en $(a+b)/2$ de f pour utiliser la symétrie.

1b On voit facilement que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de E_0 .

Soit $f \in F_1$. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $L(f)(t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du + C$ ($L(f)$ primitive de f)

Alors, $L(f)(a+b-t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u) du + C$

$$= - \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(a+b-v) dv + C \quad (\text{changement de variable } v = a+b-u)$$

$$= \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(v) dv + C \quad (\text{car } f \in F_1)$$

donc, si $f \in F_1$, alors $L(f) \in F_2$ $L(F_1) \subset F_2$

Remarque : il ne peut pas y avoir égalité car $L(F_1)$ ne peut contenir que des fonctions C^1 , alors que F_2 contient des fonctions continues non dérivable (prendre une translation de la valeur absolue)

Soit $f \in F_2$

D'après la remarque de symétrie l'intégrale de f sur $[a, b]$ et la primitive admet un centre de symétrie : vérification par le calcul:

$$\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du \right) dt = \int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-x} f(u) du \right) dx \quad (\text{changement de variable } t = a+b-x)$$

$$= \int_a^b \left(- \int_{\frac{a+b}{2}}^x f(a+b-v) dv \right) dx \quad (\text{changement de variable } u = a+b-v)$$

$$= - \int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^x f(v) dv \right) dx \quad (\text{car } f \in F_2)$$

On en déduit que si $f \in F_2$, alors, $\int_a^b \left(\int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du \right) dt = 0$ et donc $L(f)(t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(u) du$.

On a alors

$$L(f)(a+b-t) = \int_{\frac{a+b}{2}}^{a+b-t} f(u) du$$

$$= - \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(a+b-v) dv \quad (\text{changement de variable } v = a+b-u)$$

$$= - \int_{\frac{a+b}{2}}^t f(v) dv + C \quad (\text{car } f \in F_2)$$

Si $f \in F_2$, alors $L(f) \in F_1$.

$L(F_2) \subset F_1$ ici aussi l'inclusion est stricte.

2a $\forall t \in [a, b], g(a+b-t) = g(t)$ donc $g \in F_2$.

De la même façon, on définit la fonction h sur $[a, b]$ par $h(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(a+b-t)]$ et on vérifie que $h \in F_1$.

2b Soit $f \in E_0$, alors $f = h + g$ (notations du (a)) avec $h \in F_1$ et $g \in F_2$ donc $E_0 = F_1 + F_2$.

De plus $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc

$$\boxed{E_0 = F_1 \oplus F_2}$$

2c Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$L^n(f)(b) - L^n(f)(a) = \int_a^b (L^n(f))'(t) dt \quad (\text{car } L^n(f) \text{ est } C^1)$$

$$= \int_a^b L^{n-1}(f)(t) dt = 0 \quad (\text{définition de } L)$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 2 \quad L^n(f)(b) = L^n(f)(a)}$$

3a $f \in F_2, L(F_1) \subset F_2$ et $L(F_2) \subset F_1$, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*, L^{2n-1}(f)$ est donc un élément de F_1 .

On a alors $L^{2n-1}(f) \left(\frac{a+b}{2} \right) = -L^{2n-1}(f) \left(a+b - \frac{a+b}{2} \right) = -L^{2n-1}(f) \left(\frac{a+b}{2} \right)$

donc pour $n \in \mathbb{N}^* : L^{2n-1}(f) \left(\frac{a+b}{2} \right) = 0$

De la même façon,

$$L^{2n+1}(f)(a) = -L^{2n+1}(f)(a+b-a) = -L^{2n+1}(f)(b) \text{ or, on sait que } L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b)$$

donc pour $n \in \mathbb{N}^*$: $L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (L^{2n+1}(f))'(t) dt = L^{2n+1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) - L^{2n+1}(f)(a) = 0. \text{ donc pour } n \in \mathbb{N}^*: \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t) dt = 0$$

3b Toutes les variations dans cette question sont à comprendre au sens strict.

$(L(f))' = f$ et f est strictement positive. On en déduit que $L(f)$ est croissante. On sait aussi que $L(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

$(L^2(f))' = L(f)$ donc $L^2(f)$ décroît sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ et croît sur $[\frac{a+b}{2}, b]$. De plus l'intégrale de la fonction continue $L^2(f)$ est nulle. Donc $L^2(f)$ change de signe. Enfin comme $L^2(f)(a) = L^2(f)(b)$ on déduit :

$$\begin{cases} L^2(f) \text{ décroît sur } [a, \frac{a+b}{2}] \text{ de } f(a) > 0 \text{ à } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \\ L^2(f) \text{ croît sur } [\frac{a+b}{2}, b] \text{ de } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0 \text{ à } f(b) > 0 \end{cases}$$

On note c_1 et c_2 les racines de $L^2(f)$.

$(L^3(f))' = L^2(f)$, de plus $L^3(f)$ s'annule en a, b , et $\frac{a+b}{2}$. On en déduit les variations et le signe de $L^3(f)$.

$$\begin{cases} L^3(f) \text{ croît sur } [a, c_1] \text{ de } f(a) = 0 \text{ à } f(c_1) > 0 \\ L^3(f) \text{ décroît sur } [c_1, \frac{a+b}{2}] \text{ de } f(c_1) \text{ à } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \\ L^3(f) \text{ décroît sur } [\frac{a+b}{2}, c_2] \text{ de } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \text{ à } f(c_2) < 0 \\ L^3(f) \text{ croît sur } [c_2, b] \text{ de } f(c_2) \text{ à } f(b) = 0 \end{cases}$$

On passe de la même façon à $L^{(4)}(f)$ puis à $L^{(5)}(f)$ pour constater que $L^{(5)}$ à le même tableau de signe que $L^{(1)}$.

Les variations de $L^{(n)}(f)$ se vérifie alors par récurrence selon la valeur de n modulo 4.

On suppose que $L^{(4p)}$ a les variations et le signe de $L^{(4)}$ et on construit les tableaux de $L^{(4p+1)} \dots L^{(4p+4)}$

(voir annexe manuscrite, je ne sais pas tracer un tableau de variation avec mon traitement de texte)

3c $n = \{t \in [a, b] | L^n(f)(t) = 0\}$

Des tableaux de variation de la question précédente, on déduit que:

$$\begin{cases} \text{pour } n=1, \text{ le cardinal de } n \text{ est } 1 \\ \text{pour } n \text{ pair, le cardinal de } n \text{ est } 2 \\ \text{pour } n \geq 3 \text{ impair, le cardinal de } n \text{ est } 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{pour } n = 1, L(f)(a) < 0, \\ \text{pour } n \geq 3 \text{ impair, } L^n(f)(a) = 0, \\ \text{pour } n \text{ congru à } 2 \text{ modulo } 4, L^n(f)(a) > 0, \\ \text{pour } n \text{ multiple de } 4, L^n(f)(a) < 0 \end{cases}$$

3d De même:

PARTIE III 1a

En utilisant à chaque fois que $P_{i+1}(x) = \int_a^x P_i(t) dt + C$ avec C tel que $\int_a^b P_{i+1} = 0$ on a :

$$\begin{cases} P_0(t) = 1 \\ P_1(t) = (t-a) - \frac{b-a}{2} \\ P_2(t) = \frac{(t-a)^2}{2} - \frac{(b-a)(t-a)}{2} + \frac{(b-a)^2}{12} \\ P_3(t) = \frac{(t-a)^3}{6} - \frac{(b-a)(t-a)^2}{4} + \frac{(b-a)^2(t-a)}{12} \end{cases}$$

1b Montrons l'égalité $P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a) \frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$ par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, on a bien $P_1(X+b-a) - P_1(X) = (b-a)$

Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a) \frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$.

La dérivée de P_{n+1} est P_n , donc le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a) \frac{(X-a)^n}{n!}$ a pour dérivée $P_n(X+b-a) - P_n(X) - (b-a) \frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$, qui est nulle d'après l'hypothèse de récurrence.

De plus, sa valeur en a est $P_{n+1}(b) - P_{n+1}(a)$ qui est nulle d'après la question II 2°(c).

On en déduit que le polynôme $P_{n+1}(X+b-a) - P_{n+1}(X) - (b-a) \frac{(X-a)^n}{n!}$ est nul, d'où la relation à l'ordre $n+1$.

D'après le principe de récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(X+b-a) - P_n(X) = (b-a) \frac{(X-a)^{n-1}}{(n-1)!}$

Si vous rédigez avec des fonctions polynômes sur $[a, b]$ n'oubliez pas de dire que le segment est de cardinal infini pour revenir aux polynômes.

1c Dans la relation précédente, on pose $a = 0, b = 1, n = 3$ et $X = k$.

On obtient $P_3(k+1) - P_3(k) = \frac{k^2}{2}$

On somme alors pour k variant de 1 à n et on trouve $P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2$.

Or $P_3(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}$ d'où finalement:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2a \quad \varphi(P, Q) = \frac{1}{b-a} \int_a^b P(t)Q(t) dt$$

φ est une application de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ dans \mathbb{R} .

On vérifie facilement que φ est bilinéaire et symétrique.

Pour tout $P \in \mathcal{P}$, $\varphi(P, P) \geq 0$ et si $\varphi(P, P) = 0$, alors l'intégrale de la fonction continue positive P^2 est nulle donc $P = 0$ et φ est définie positive.

φ est bien un produit scalaire de \mathcal{P}

2b Intégrons $\varphi(P_n, P_m)$ par parties:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b P_n(t)P_m(t) dt = \frac{1}{b-a} \left([P_n(t)P_{m+1}(t)]_a^b - \int_a^b P_{n-1}(t)P_{m+1}(t) dt \right) \text{ avec } u = P_m, v = P_{m+1} \text{ fonctions } C^1 \text{ sur } [a, b]$$

or, on sait d'après II 2°. (c) que pour $k \geq 2$, $P_k(a) = P_k(b)$ donc pour $m \geq n \geq 2$, on a

$$\varphi(P_n, P_m) = -\varphi(P_{n-1}, P_{m+1}).$$

On montre alors par récurrence que

$$\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} \varphi(P_{m+n-1}, P_1) = \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} \int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t) dt$$

$$\text{Puis } \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} \int_a^b P_{m+n-1}(t)P_1(t) dt$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} \left([P_{m+n}(t)P_1(t)]_a^b - \int_a^b P_{m+n}(t) dt \right) \text{ (on intègre par parties: } u_1, v = P_{m+n}, \text{ fonction } \in C^1([a, b]))$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} (P_{m+n}(b)P_1(b) - P_{m+n}(a)P_1(a)) \text{ (car } \int_a^b P_{m+n}(t) dt = 0 \text{ par définition de } L)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{b-a} (P_{m+n}(a)(b-a)) \text{ (car } P_{m+n}(a) = P_{m+n}(b) \text{ et } P_1(b) - P_1(a) = b-a)$$

On obtient bien pour $m \geq n > 0$ $\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{m+n}(a)$

$$\varphi(P_n, P_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b P_n(t) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b L(P_{n-1})(t) dt = 0 \text{ d'après la définition de } L.$$

2c $P_n(a) = L^n(P_0)(a)$ et P_0 est un élément de F_2 tel que pour tout $t \in [a, b]$, $P_0(t) > 0$. En utilisant le résultat trouvé en II 3°. (d), on montre que

$P_n(a) = 0$ si et seulement si n est impair et différent de 1.

3a Pour tout entier n , le polynôme P_n est de degré n , $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une base de \mathcal{P} .

On en déduit que les espaces $FP_1 = \text{Vect}\{P_n, n \in 2\mathbb{N} + 1\}$ et $FP_2 = \text{Vect}\{P_n, n \in 2\mathbb{N}\}$ sont deux espaces supplémentaires: $\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2$.

On peut aussi repartir de $E = F_1 \oplus F_2$.

3b Si n est un entier pair et si m est un entier impair, montrons que $\varphi(P_n, P_m) = 0$.

Si $n = 0$, c'est vrai (III 2)(b).

Si $0 < n \leq m$, $\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{m+n}(a) = 0$. (d'après III 2) (b) et III 2) (c)

La somme directe $FP_1 \oplus FP_2$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire φ .

4a Montrons par récurrence que $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!}$

Pour $n = 0$ la formule est vraie.

$$\text{Supposons que } P_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!}$$

P_{n+1} est une primitive de P_n donc

$$P_{n+1}(t) = \int_a^t P_n(u) du + P_{n+1}(a) = \int_a^t P_n(u) du + \gamma_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!} + \gamma_{n+1} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \gamma_k \frac{(t-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!}$$

On obtient la relation à l'ordre $n + 1$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(t) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(t-a)^{n-k}}{(n-k)!} \frac{(b-a)^k}{k!}$

$$\text{On pose ensuite } t = b: P_n(b) = \sum_{k=0}^n \gamma_k \frac{(b-a)^n}{(n-k)!k!} = \frac{(b-a)^n}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \gamma_k$$

$$\text{Or pour } n \geq 2, P_n(b) = P_n(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} \gamma_n$$

$$\text{On en déduit la relation demandée pour } n \geq 2: \gamma_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \gamma_k$$

On peut alors déterminer une formule de récurrence permettant de calculer les γ_n :

$$\gamma_0 = 1 \text{ et pour } n \geq 2, \gamma_{n-1} = \frac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} C_n^k \gamma_k$$

On en déduit que γ_n est indépendant de a et b .

$$4b \quad \gamma_1 = \frac{-1}{2}; \quad \gamma_2 = \frac{1}{6}; \quad \gamma_3 = 0; \quad \gamma_4 = \frac{-1}{30}; \quad \gamma_6 = \frac{1}{42}; \quad \gamma_8 = \frac{-1}{30}; \quad \gamma_{10} = \frac{5}{66};$$

4c On utilise le procédé d'orthogonalisation de Schmidt en calculant les produits scalaires avec les relations de la question

$$\text{III 2°. (b). } \varphi(P_n, P_0) = 0 \text{ et pour } m \geq n > 0, \varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{m+n}(a) = (-1)^{n+1} \frac{(b-a)^{m+n}}{(m+n)!} \gamma_{m+n}$$

On obtient comme base φ -orthogonale du sous espace G de FP_2 engendré par la famille (P_0, P_2, P_4, P_6) :

$$(P_0, P_2, P_4 + (b-a)^2 \frac{P_2}{42}, P_6 + (b-a)^2 \frac{P_4}{33} + (b-a)^4 \frac{P_2}{7920})$$