

PRELIMINAIRE

Soit a, b deux fonctions continues sur un intervalle I de \mathbb{R} à valeurs réelles . L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension 2 .

Ici g étant C^1 la fonction $g + 1$ est continue et la fonction nulle est naturellement continue . E est donc un espace vectoriel réel de dimension 2 .

PREMIERE PARTIE

Question 1: L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est l'ensemble des fonctions y telle qu'il existe un réel A et un réel $\phi \in]-\pi, \pi]$ telles que $\forall x, y(x) = A \cos(x + \phi)$
 $y(x)$ admet alors une infinité de racines : $\{\frac{\pi}{2} - \phi + n\pi, n \in [1.. + \infty[\}$

Question 2 :

Question 2.1:

f_1 est bien C^2 sur \mathbb{R}^{+*} car les fonctions $\sin(x), 1/x$ et $\cos(x)$ le sont .

de plus pour $x > 0$ $f_1'(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + \sin(x)$ et $f_1''(x) = \frac{-\sin(x)}{x} - 2\frac{\cos(x)}{x^2} + 2\frac{\sin(x)}{x^3} + \cos(x)$.

$$\text{Donc } f_1''(x) + (1 - \frac{2}{x^2})f_1(x) = \left(\frac{-\sin(x)}{x} - 2\frac{\cos(x)}{x^2} + 2\frac{\sin(x)}{x^3} + \cos(x) \right) + \left(\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) \right) - 2 \left(\frac{\sin(x)}{x^3} - \frac{\cos(x)}{x^2} \right) = 0$$

$$\boxed{f_1 \in E}$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = 1$ donc f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant :

$$\boxed{f_1(0) = 0}$$

\sin et \cos sont développables en séries entière sur \mathbb{R} avec un rayon de convergence infinie . On a donc

$$x \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{(2k+1)!} + \frac{1}{(2k)!} \right) x^{2k}$$

L'égalité est encore vraie si $x = 0$. $\frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)$ est donc développable en série entière sur \mathbb{R} , elle y est donc C^∞ . Par restriction f_1 prolongée est C^∞ sur \mathbb{R}^+ .

$$\boxed{f_1(n\pi) = (-1)^{n+1}}$$

Sur chaque intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ f_1 est continue et $f_1(n\pi) \times f_1((n+1)\pi) < 0$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une racine x_n sur chaque intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$

$$\boxed{f_1 \text{ admet une infinité de racines}}$$

question 1.2: Comme dans la question précédente $f_2 \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, et

$$\forall x > 0, f_2''(x) + (1 - \frac{2}{x^2})f_2(x) = 2(1 - \alpha) \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

question 1.3:

f_1 et f_2 sont deux éléments de E linéairement indépendants . En effet s'il existe deux réels λ et μ tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$ la valeur en $x = \pi$ donne $-\lambda - \frac{\mu}{\pi} = 0$ et celle en $\frac{\pi}{2}$ donne $\frac{2}{\pi}\lambda + \mu = 0$. Le déterminant du système

$$\begin{vmatrix} -1 & -1/\pi \\ 2/\pi & 1 \end{vmatrix} = 2/\pi^2 - 1 \text{ est non nul } . \text{ Donc } \lambda = \mu = 0$$

E étant un espace vectoriel de dimension 2 il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que

$$\boxed{u \in E \Leftrightarrow u = C_1 f_1 + C_2 f_2}$$

Expression qui peut se transformer en posant $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ et $\phi \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos(\phi) = \frac{C_1}{A}$, $\sin(\phi) = \frac{C_2}{A}$

$$y(x) = A \left(\frac{\sin(x + \phi)}{x} - \cos(x + \phi) \right)$$

En particulier $y(\pi/2 + n\pi - \phi) = (-1)^{n+1}$ et comme à la question 1.2 on déduit qu'il existe une infinité de racines strictement positive .

question 3 :

question 3.1: le résultat est évident en multipliant par $x^2 \neq 0$ sur \mathbb{R}^{+*}

question 3.2: Supposons qu'il existe des solutions $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ développable en série entière sur \mathbb{R} . On a alors pour tout x réel :

$$x^2 f''(x) + (x^2 - 6)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} - 6 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$x^2 f''(x) + (x^2 - 6)f(x) = -6a_0 - 6a_1 + \left(\sum_{n=2}^{\infty} (n-3)(n+2)a_n + a_{n-2} \right) x^n$$

On veut que cette quantité soit nulle . Donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ et $n \geq 4$ $a_n = -\frac{1}{(n-3)(n+2)} a_{n-2}$.

Une récurrence évidente montre que si n est pair $a_n = 0$.

Si n est impair on pose $n = 2k + 1$ et pour $k \geq 2$ $a_{2k+1} = -\frac{1}{(2k-2)(2k+3)} a_{2k-1}$

$$a_{2k+1} = (-1)^{k-1} \frac{1}{((2k-2)(2k-4) \dots 4 \cdot 2)((2k+3)(2k+1) \dots 9 \cdot 7)} a_3 = (-1)^{k-1} 15 \frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!} a_3$$

Donc $f(x) = -15a_3 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!} x^{2k+1}$. On vérifie par la règle de D'alembert que cette série entière a un rayon de convergence infinie:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\frac{(2k+2)(2k+4)}{(2k+5)!} x^{2k+3}}{\frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!} x^{2k+1}} \right| = \frac{(2k+2)(2k+4)}{(2k)(2k+2)(2k+4)(2k+5)} x^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\boxed{f(x) = -15a_3 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)(2k+2)}{(2k+3)!} x^{2k+1}}$$

On peut décomposer $2k(2k+2) = (2k+2)(2k+3) - 3(2k+3) = (2k+2)(2k+3) - 3(2k+3) + 3$ D'où :

$$f(x) = -15a_3 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{3}{x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} - \frac{3}{x^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!} \right)$$

$$f(x) = -15a_3 \left((\sin(x) - x) + \frac{3}{x} \left(\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{3}{x^2} \left(\sin(x) - x + \frac{x^3}{6} \right) \right)$$

$$\boxed{f(x) = -15a_3 \left(\sin(x) + \frac{3 \cos(x)}{x} - \frac{3 \sin(x)}{x^2} \right)}$$

DEUXIEME PARTIE

question 1 : On a $y = \lambda \cos + \mu \sin$. Donc en dérivant , compte tenu de $\lambda' \cos + \mu' \sin : y' = -\lambda \sin + \mu \cos$ soit en redérivant : $y'' = -\lambda \cos - \mu \sin - \lambda' \sin + \mu' \cos$ et comme $y'' + (1 + g)y = 0$ on a :

$$\boxed{\lambda' \sin - \mu' \cos = g y}$$

On a donc un système linéaire d'inconnues les fonctions λ' et μ' . Après résolution :

$$\lambda' = g y \sin \quad , \quad \mu' = -g y \cos$$

question 2 : il existe donc deux constantes C_1 et C_2 telles que :

$$\forall x > 0, \lambda = C_1 + \int_a^x g(u)y(u) \sin(u) du \quad , \quad \mu(x) = C_2 - \int_a^x g(u)y(u) \cos(u) du$$

et donc

$$\boxed{\forall x > 0, y(x) = (C_1 + \int_a^x g(u)y(u) \sin(u) du) \cos(x) + (C_2 - \int_a^x g(u)y(u) \cos(u) du) \sin(x)}$$

question 3 : l'équivalence est une conséquence de la formule :

$$\sin(u - x) = \sin(u) \cos(x) - \sin(x) \cos(u)$$

question 4:

On reprend $y(x) = (C_1 + \int_a^x g(u)y(u) \sin(u) du) \cos(x) + (C_2 - \int_a^x g(u)y(u) \cos(u) du) \sin(x)$

Si on dérive une fois (possible car on a les primitives de deux fonctions continue) :

$$y'(x) = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) - \left(\int_a^x g(u)y(u) \sin(u) du \right) \sin(x) - \left(\int_a^x g(u)y(u) \cos(u) du \right) \cos(x)$$

Les deux autres termes se simplifiant deux à deux .

Donc :

$$y''(x) = -C_1 \cos(x) - C_2 \sin(x) - \left(\int_a^x g(u)y(u) \sin(u) du \right) \cos(x) + \left(\int_a^x g(u)y(u) \cos(u) du \right) \sin(x) \dots$$

$$\dots - g(x)y(x) (\sin(x)^2 + \cos(x)^2)$$

On a donc bien $y''(x) + y(x) = -g(x)y(x)$.

TROISIEME PARTIE

question 1 : C'est une conséquence directe de l'intégrabilité de g sur $[1, +\infty[$. En effet si g est intégrable $|g|$ est intégrable et $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} |g(t)| dt = 0$. L'intégrale est donc inférieure à $1/2$ pour a assez grand .

question 2 :

question 2.1: l'image du segment $[a, b]$ par la fonction continue y est un segment . Il admet donc un plus grand élément .

question 2.2: D'après l'inégalité de la moyenne:

$$\left| \int_a^b g(u)y(u) \sin(u - x) du \right| \leq \sup(y(u) \sin(u - x), u \in [a, b]) \int_a^b |g(u) du| \leq M_b \cdot 1/2$$

d'après les majorations des questions précédentes .

question 2.3: On connaît la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \int_a^x g(u)y(u) \sin(u - x) du$$

En particulier pour $x \in [a, b]$, $|y(x)| \leq |C_1| + |C_2| + \left| \int_a^x g(u)y(u) \sin(u - x) du \right| \leq |C_1| + |C_2| + M_b/2$

Le membre de droite ne dépend plus de x c'est donc un majorant de $\{|y(x)|, x \in [a, b]\}$. Donc

$$M_b \leq |C_1| + |C_2| + M_b/2$$

Ce qui équivaut à $M_b \leq 2(|C_1| + |C_2|)$

En particulier : $\forall b \geq a |y(b)| \leq 2(|C_1| + |C_2|)$.

$$\boxed{\forall \text{ est donc borné sur } [a, +\infty[\text{ et } M = \sup(y, y > a) \leq 2(|C_1| + |C_2|)}$$

question 2.4 y étant continue sur tout segment $[\alpha, a]$ y est bornée . Donc par réunion y est borné sur $[\alpha, +\infty[$ si $\alpha \leq a$. Le résultat est évident dans le cas contraire .

L'exemple de f_2 dans la première partie montre que y peut ne pas être bornée sur \mathbb{R}^{+*} .

question 3 : la fonction g_u est continue sur $[a, +\infty[$ comme produit de fonctions continues .

De plus $\forall x \in [a, +\infty[, |g_u(x)| \leq M |g(x)|$ la fonction g_u est donc continue , dominée par $|g(x)|$ intégrable sur $[a, +\infty[$ donc est intégrable sur $(a, +\infty[$

question 4 : On a donc

$$\int_a^x g(u)y(u) \sin(u - x) du = \int_a^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u - x) du - \int_x^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u - x) du$$

Donc en reportant et en développant $\sin(u - x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y(x) = C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) - \int_x^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u - x) du$$

avec :

$$C_3 = C_1 + \int_a^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u) du, \quad C_4 = C_2 - \int_a^{+\infty} g(u)y(u) \cos(u) du$$

question 5 : La question est équivalente à montrer que $\int_x^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u - x) du$ a une limite nulle si x tend vers l'infini ; Or

$$\left| \int_x^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u - x) du \right| \leq \left| \int_x^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u - x) \right| du \leq M \int_x^{+\infty} g(u) du$$

Comme g est intégrable sur $[a, +\infty[$ ce majorant tend vers 0 . Donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - C_3 \cos(x) - C_4 \sin(x)) = 0}$$

question 6 : On peut transformer $C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) = A \cos(x + \phi)$ avec $A > 0$. On a alors que pour $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - \phi$, $y(x_n) = A(-1)^n + Y_n$ avec $Y_n = y(x_n) - C_3 \cos(x_n) - C_4 \sin(x_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$.

A partir d'un certain rang N on a donc $x_n > 0$ et $|Y_n| < A$. Le signe de $y(x_n)$ est donc $(-1)^n$.

Sur chaque intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ la fonction continue y admet donc une racine d'après le théorème des valeurs intermédiaires .

$$\boxed{y \text{ admet une infinité de racines}}$$

question 7 : Si $C_3 = C_4 = 0$ la fonction y est nulle sur $[a, +\infty[$: Soit $M = \sup_{[a, +\infty[}(y)$ qui existe d'après la question 3. Comme à la question 2 on a

$$\left| \int_a^{+\infty} g(u)y(u) \sin(u - x) du \right| \leq \frac{M}{2}$$

Comme $C_3 = C_4 = 0$ on a donc $\forall x \geq a$ $|y(x)| \leq \frac{M}{2}$ donc $M \leq \frac{M}{2}$. Comme $M \geq 0$ on a donc $M = 0$

En particulier $y(a) = y'(a) = 0$. Or la fonction nulle est solution évidente de l'équation (Eq) Donc par unicité de la solution d'une équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x) = c(x)$ vérifiant une condition initiale donnée

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, y(x) = 0}$$