escp-eap 2001(Ecole de commerce)
OPTION SCIENTIFIQUE MATHEMATIQUES I

adapté en retirant certaines question qui sont du cours de PC
et en ajoutant le dernier exemple.

1.

a) question de cours

b) $P(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f donc commute avec f .

2. **a)** question de cours

b) On sait que les hyperplans stables se cherchent en résolvant $LA = \mu A$. Soit en transposant ${}^tA{}^tL = \mu{}^tL$.

Or ${}^tL \neq (0)$ donc la proposition équivaut à :${}^tL$ est vecteur propre de ${}^tA$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Pour trouver les droites stables on cherche les vecteurs propres de B :
  Les valeurs propres de la matrice triangulaire supérieure B sont sur la diagonale: 1 et 2 sont les valeurs propres de B.
  Le calcul donne sans problème $E_1(B) = \text{Vect}(e_1), E_2(B) = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$
  les droites stables sont donc $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$.
- pour trouver les plans stables on recherche les vecteurs propres de ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
  On trouve $E_1({}^tB) = \text{Vect}(e_2 - e_3), E_2({}^tB) = \text{Vect}(e_3)$
  les plans stables sont les plans d'équation $y = z$ et $z = 0$, soit les plans $\text{Vect}(e_1, e_3)$ et $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

g admet 6 sous espaces vectoriels stables :

- $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$
- $\text{Vect}(e_1)$ et $\text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$
- $\text{Vect}(e_1, e_1 + e_2 + e_3)$ et $\text{Vect}(e_1, e_2)$
- E

3. Soit $(x_k)_{k\in[1,p]} \in \prod_{k=1}^p F_k$,

$$f\left(\sum_{k=1}^p x_k\right) = \sum_{k=1}^p f(x_k) \in \sum_{k=1}^p F_k,$$

puisque $f(x_k) \in F_k$.

$\sum_{k=1}^p F_k$ est un sous-espace vectoriel stable par f.

En utilisant la question 1) avec le polynôme $(X - \lambda_k Id_E)^{n_k}$, on voit que, pour tout λ_k, $\ker(f - \lambda_k Id_E)^{n_k}$ est stable par f.

Alors, d'après la question 2), $\boxed{\sum_{k=1}^p \ker(f - \lambda_k Id_E)^{n_k} \text{ est stable par } f.}$

4. **a)** Soit F stable par f et $x \in F$,

$$(f - \lambda Id)(x) = f(x) - x \in F$$

comme somme de deux vecteurs de F: F est stable par $f - \lambda Id$.

Réciproquement si F est stable par $f - \lambda Id$, d'après le premier sens, F est stable par $(f - \lambda Id) - (-\lambda)Id = f$.

$$\boxed{f \text{ et } (f - \lambda Id) \text{ ont les même sous espaces stables}}$$

b) Si F est stable par f, alors $f^2(F) = f(f(F)) \subset f(F) \subset F$, F est stable par f^2.

La réciproque est fausse comme le montre la rotation de $\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\text{tout sous espace stable par } f \text{ est stable par } f^2}$$

Remarque le résultat se généralise à toute puissance positive de f , ou même à tout polynôme de l'endomorphisme f .

c) Puisque f^{-1} existe, f est bijective

Soit F un sous-espace stable par f, on a $f(F) \subset F$. Comme f est bijective on a $\dim(f(F)) = \dim(F)$. Donc $f(F) = F$. On a donc $f^{-1}(F) = f^{-1}(f(F)) = F$ et F est stable par f^{-1}.

Réciproquement comme $f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$ tout sous espace stable par f^{-1} est stable par f .

$$\boxed{f \text{ et } f^{-1} \text{ ont les mêmes sous-espaces stables}}$$

d) Soit f un endomorphisme de E laissant stable tout sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[1,n]}$ une base de E. f laisse stable toutes les droites vectorielles $\mathrm{Vect}(e_i)$, c'est à dire que $\forall i \in [1,n]$, e_i est vecteur propre associé à f (question 2)a) et à une valeur propre μ_i.

Soit $(i,j) \in [1,n]^2$ tels que $i \neq j$, la droite $\mathrm{Vect}(e_i + e_j)$ est stable, donc, $e_i + e_j$ est propre et pour un certain réel μ, $f(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j)$. On a donc,

$$\mu(e_i + e_j) = f(e_i + e_j) = f(e_i) + f(e_j) = \mu_i e_i + \mu_j e_j.$$

Puisque (e_i, e_j) est libre, $\mu = \mu_i = \mu_j$ dès que $i \neq j$, nécessairement les μ_i sont égaux:

$$f = \mu Id.$$

Réciproquement, il est évident que si $f = \mu Id$, elle laisse tous les sous-espaces stables.

$f \in (E)$ laissant stable tout sous-espace de E est de la forme $f = \lambda Id_E$.

Remarque : exercice classique : si pour tout x , $(x, f(x))$ est lié f est un homothétie éventuellement nulle.

e) La rotation R d'angle $\frac{\pi}{2}$, décrite plus haut convient: elle n'a pas de sous-espaces stables de dimension 1, donc les seuls espaces $\{0\}$ et E de dimension 0 et 2 sont stables.

Le cas où l'endomorphisme est diagonalisable

1. Si $p = 1$, f, diagonalisable et n'ayant qu'une seule valeur propre, est une homothétie (i.e $= \lambda Id$): tous les sous-espaces de E sont stables.

2. **a)** On sait, puisque f est diagonalisable, que E est somme directe des sous espaces propres:

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k.$$

Tout x de $F \subset E$ se décompose donc de manière unique $x = \sum_{k=1}^{p} x_k$ avec $\forall k \in [1,p], \quad x_k \in E_k$.

b) Pour $x = \sum_{k=1}^{p} x_k \in F$,

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{p} x_k\right) = \sum_{k=1}^{p} f(x_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$$

est dans F (stable). donc le vecteur $f(x) - \lambda_1 x$ est dans F (par combinaison linéaire) or :

$$f(x) - \lambda_1 x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k - \lambda_1 \sum_{k=1}^{p} x_k = \sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k = \sum_{k=2}^{p} (\lambda_k - \lambda_1) x_k$$

c) En recommençant la même manœuvre que dans la question précédente,

$$\sum_{k=3}^{p} (\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_1) x_k \in F$$

et donc par récurrence sur j

$$\sum_{k=j}^{p} (\lambda_k - \lambda_j) \cdots (\lambda_k - \lambda_2)(\lambda_k - \lambda_1) x_k \in F$$

et enfin

$$\prod_{i=1}^{p-1} (\lambda_p - \lambda_i) x_p \in F.$$

Puisque les λ_i sont distincts, $x_p \in F$. De l'avant dernière égalité, on tire $x_{p-1} \in F$ et par récurrence on montre que tous les x_i, $(i \in [1,p])$ sont dans F.

Dans votre copie ces récurrences doivent être rédigées.

3. Montrons que si F est stable par f, $F = \oplus_{k=1}^{p}(F \cap E_k)$.

— L'inclusion $\oplus_{k=1}^{p}(F \cap E_k) \subset F$ est évidente (somme de sous espaces vectoriels de F).

— L'inclusion $F \subset \sum_{k=1}^{p}(F \cap E_k)$ résulte de la question précédente.

—Comme la somme des E_k est directe , la somme des sous espaces F_k est aussi directe.

$$\boxed{F \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } F = \oplus_{k=1}^{p} F_k, F_k \subset E_k}$$

4. Les $F_k = F \cap E_k$ sont des sous-espaces propres de la restriction de f à F, puisque $F = \oplus_{k=1}^{p}(F \cap E_k)$, la restriction de f à F est diagonalisable.

$$\boxed{\text{l'endomorphisme induit sur tout sous espac stable est diagonalisable}}$$

5. Dès que f possède un sous-espace propre de dimension supérieure ou égale à deux, il possède déjà une infinité de sous-espaces stables, les droites vectorielles de ce sous-espace.

Une condition nécessaire pour que E possède un nombre fini de sous-espaces vectoriels stables par f est que f ne possède que des sous-espaces propres de dimension 1, c'est à dire que f doit avoir n valeurs propres distinctes.

C'est suffisant,:les sous-espaces stables sont les $\sum_{i=1}^{n} F_k$ avec $\forall k \in [1, n]$, $F_k \subset E_k$, ce qui entraîne puisque E_k est de dimension 1, $F_k = \{0\}$ ou $F_k = E_k$.Pour chaque k on a deux choix pour F_k . Les choix sont indépendants.

$$\boxed{\text{On a } 2^n \text{ sous espaces stables si toutes les valeurs propres sont simples.}}$$

Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre n

1. **a)** vérification évidente.

b) Il est évident que les sous-espaces précédents sont stables par D, montrons que ce sont les seuls.

Réciproquement soit F un sous-espace non réduit à 0 et stable par D,

F contient un polynôme non nul , et tout polynôme de F est de degré n. Il existe donc un polynôme P de degré maximum notée k.

- On a $F \subset \mathbb{R}_k[X]$.
- On a $\mathbb{R}_k[X] \subset F$: F étant stable, $D(P) = P', D^2(P) = P'', \dots, D^k(P) = P^{(k)}$ sont dans F, or c'est une famille de polynômes étagés en degré. $\mathbb{R}_k[X] = \text{Vect}(D^{(i)}(P)) \subset F$.
- $\boxed{\text{Les seuls sous espaces stables par } D \text{ sont } \{0\} \text{ et les } \mathbb{R}_k[X]}$
- *5/2 : Si ce n'est pas déjà fait revoyez le devoir de l'an dernier sur des équations liés à la dérivation et qui commence aussi par l'étude des sous espaces propres de D .*

2. **a)** analyse de la matrice : on a $f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, f(e_3) = e_2, \cdots f(e_n) = e_{n-1}$. Donc $e_{n-1} = f(e_n)$, $e_{n-2} = f^2(e_n)$ $\cdots$ $e_1 = f^{(n-1)}(e_n)$, $f^{(n)}(e_n) = 0$. On cherche donc un vecteur e_n tel que $f^{(n)}(e_n) = 0$ et $f^{(n-1)}(e_n) \neq 0$

Puisque $f^{n-1} \neq \mathbf{0}$, il existe e_n tel que $f^{n-1}(e_n) \neq 0$.

Considérons la famille $(f^k(e_n))_{k \in [0, n-1]}$ et montrons qu'elle est libre.

Supposons que $\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k f^k(e_n) = 0$. Soit l le plus petit entier tel que $\mu_l \neq 0$, on a donc $\sum_{k=l}^{n-1} \mu_k f^k(e_n) = 0$, en composant par f^{n-l-1}, on obtient

$$f^{n-l-1}\left(\sum_{k=l}^{n-1} \mu_k f^k(e_n)\right) = \sum_{k=l}^{n-1} \mu_k f^{k+(n-l-1)}(e_n) = \mu_l f^{n-1}(e_n)$$

ce qui est absurde: tous les coefficient μ_i sont nuls, la famille est bien libre.

$(f^k(e_n))_{k \in [0, n-1]}$ est une famille libre de n vecteurs dans E de dimension n, c'est une base de E.

La matrice de f dans la base $\left(f^{(n-1)}(e_n), f^{(n-2)}(e_n), \cdots, f(e_n), e_n\right)$ est A.

b) Il suffit de changer la norme des vecteurs de base.

On prend $f_1 = e_1, f_2 = e_2$, puis on veut $f(f_3) = 2f_2 = 2e_2$,$f_3 = \frac{e_3}{2}$ convient . Plus généralement si $f_i = \frac{e_i}{(i-1)!}$ la matrice de f dans cette base est bien B, donc $\boxed{A \text{ est semblable à } B}$

On remarque immédiatement que la matrice de D, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, est B, les sous-espaces stables de B sont les mêmes, à un isomorphismes près, que ceux de D.

Ce sont donc:

$$\{\text{Vect}(e_i, e_{i+1}, \cdots e_n)\}_{i=0}^{n-1} \cup \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

Le cas où l'endomorphisme est nilpotent d'ordre 2

1. **a)** $f(f(F_2)) = \{0\}$ puisque $f^2 = 0$, donc $f(F_2) \subset \ker f$.

   b) On a $F_2 \cap F_1 \subset F_2 \cap \ker f = \{0\}$, $F_2 \cap F_1 = \{0\}$, la somme $F_1 + F_2$ est directe.

   Soit $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$, $f(x) = f(x_1) + f(x_2) = 0 + f(x_2) \in F_1$ car $f(F_2) \subset F_1$, $F_1 + F_2$ est stable.

   c) Soit $a \in A \cap C$ et $b \in B \cap C$, alors $a + b \in A + B$ et $a + b \in C$ donc $a + b \in (A + B) \cap C$.

   L'inclusion en sens inverse est fausse comme le montre l'exemple de trois droites distinctes.

   d) Montrons $F_1 = (F_1 + F_2) \cap \ker f$

   - D'après l'inclusion précédente

   $$\begin{aligned}(F_1 \cap \ker f) + (F_2 \cap \ker f) &\subset (F_1 + F_2) \cap \ker f \text{ donc} \\ F_1 + \{0\} &\subset (F_1 + F_2) \cap \ker f \\ F_1 &\subset (F_1 + F_2) \cap \ker f.\end{aligned}$$

   - Soit $y \in (F_1 + F_2) \cap \ker f$ il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$ tels que $x_1 + x_2 = y$ et $y \in \mathrm{Ker}(f)$.Or $x_1 \in F_1 \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Ker}(f)$ donc $x_2 = y - x_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $x_2 = 0$ par définition de F_2.
     Donc $y = x_1 \in F_1$
   - Donc

   $$\boxed{F_1 = (F_1 + F_2) \cap \ker f}$$

2. On a encore $f(f(F)) = \{0\}$ puisque $f^2 = 0$, donc $f(F) \subset \ker f$.

   De plus F est stable donc $f(F) \subset \mathrm{Ker}(f) \cap F = F_1$.

   Réciproquement si $f(F) \subset (F \cap \mathrm{Ker}(f))$ la question précédente montre que F est stable.

   $$\boxed{F \text{ est stable si et seulement si } f(F) \subset (F \cap \mathrm{Ker}(f))}$$

3. *Remarque : Il y a peut-être mieux la méthode qui suit n'utilisant pas d'endomorphisme nilpotent d'ordre 2.*

   On a immédiatement

   $$M - Id = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (M - Id)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   $$M - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (M - 2Id)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   $$(h - Id)^2(e_1) = 0, (h - Id)^2(e_2) = 0, (h - 2Id)^2(e_3) = 0, (h - 2Id)^2(e_4) = 0.$$

   donc, puisqu'à voir leurs matrices, $(h - Id)^2$ et $(h - 2Id)^2$ sont de rang 2, en utilisant le théorème du rang, G_1 et G_2 sont de dimension 2,

   $$G_1 = \ker(h - Id)^2 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2), \qquad \text{et} \quad G_2 = \ker(h - Id)^2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$$

   sont supplémentaires car $\{e_1, e_2\}$ et $\{e_3, e_4\}$ forment une partition de la base canonique.

   Remarquons que G_1 et G_2 sont stables d'après I)3)b).On reprend ensuite l'idée directrice du cas diagonalisable.

   Soit F stable, $H_1 = G_1 \cap F$ et $H_2 = G_2 \cap F$ sont stables (comme intersection de sous-espaces stables)

   Puisque $G_1 \oplus G_2 = E$, tout vecteur f de F se décompose sous la forme $f = g_1 + g_2$ $(g_1 \in G_1, g_2 \in G_2)$.

   On a donc :

   $$\begin{aligned} f &= g_1 + g_2 \\ h(f) &= h(g_1) + h(g_2) \\ h^2(f) &= (2h(g_1) - g_1) + (4h(g_2) - 4g_2) \text{ par définition de } G_1 \text{ et } G_2 \end{aligned}$$

   par combinaison linéaire pour éliminer g_2 et $h(g_2)$ on a

   $$3g_1 - 2h(g_1) = h^2(f) - 4h(f) + 4f \in F \text{ car } F \text{ est stable}$$

En composant par h : $-h(g_1)+2g_1 \in F$ et en éliminant $h(g_1)$, $g_1 \in F$. Et donc $g_2 = f - g_1 \in F$
et donc $g_1 \in H_1$ et $g_2 \in H_2$ Soit $F = H_1 \oplus H_2$ (somme directe car G_1 et G_2 le sont)
Réciproquement si H_1 et H_2 sont deux sous espaces stables de G_1 et G_2 la somme $H_1 \oplus H_2$ est stable (I.3.a)

les sous espaces stables sont exactement la somme d'un sous espace stable de chaque G_i

Les droites stables de G_1 sont les espaces propres de la restriction de f à G_1, une seule droite stable $\text{Vect}(e_1)$. De même, il n'y a qu'une droite stable dans G_2, $\text{Vect}(e_3)$.
Les sous-espaces stables de f sont obtenus en sommant ceux de

$$G_1 : \qquad \{0\}, \text{Vect}(e_1), \text{Vect}(e_1, e_2)$$

et ceux de

$$G_2 : \qquad \{0\}, \text{Vect}(e_3), \text{Vect}(e_3, e_4),$$

en voici la liste classée par dimension:
— dimension 0:$\{0\}$
— dimension 1:$\text{Vect}(e_1), \text{Vect}(e_2)$,
— dimension 2:$G_1 = \text{Vect}(e_1, e_2), G_2 = \text{Vect}(e_3, e_4), \text{Vect}(e_1, e_3)$;
— dimension 3:$\text{Vect}(e_1, e_2, e_3), \text{Vect}(e_1, e_3, e_4)$,
— dimension 4:$\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$.

Existence d'un plan stable par un endomorphisme

1. **a)** E étant de dimension n, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2, la famille de n^2+1 vecteurs $(f^k)_{k\in[0,n^2]}$ de $\mathcal{L}(E)$ est donc liée: il existe une famille de réels, non tous nuls, $(\mu_k)_{k\in[0,n^2]}$ telle que $\sum_{k=0}^{n^2} \mu_k f^k = 0$, donc le polynôme, non nul, $\sum_{k=0}^{n^2} \mu_k X^k$ annule f.

   b)

   - L'ensemble $\{d^oP \ o \ P \neq 0 \ et \ P(f) = 0\}$ est une partie non vide de N, qui possède un plus petit élément d, il existe donc un polynôme non nul, annulateur de f et de degré minimum d.
   - En divisant ce polynôme par son coefficient dominant on obtient un polynôme unitaire M.
   - Si ce polynôme n'était pas unique , on aurait deux solutions M_1 et M_2 . La différence $M_1 - M_2$ est alors un polynôme annulateur non nul de degré $< d$. Absurde.

   c) f est une homothétie (éventuellement nulle)

2. Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des racines de M. On sait déjà que comme M est un polynôme annulateur $Sp(M) \subset \mathcal{M}$.
   Réciproquement si λ est une racine de M . montrons que $(f - \lambda Id)$ n'est pas inversible par l'absurde.
   Si λ est racine de M on peut factoriser $M = (X - \lambda) M_1$ et donc $M(f) = (f - \lambda Id) \circ M_1(f) = 0$. Or si $(f - \lambda Id)$ est inversible on peut multiplier à gauche par $(f - \lambda I)^{-1}$.On trouve que M_1 est un polynôme annulateur non nul de degré strictement plus petit que d.Absurde. Donc $(f - \lambda Id)$ n'est pas inversible , donc pas injective (endomorphisme en dimension finie) et $\lambda \in Sp(f)$

   $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f \text{ si et seulement si } \lambda \text{ esr racine de } M}$

3. **a)** $f^2 + bf + cId_E$ n'est pas injectif en reprenant la méthode de la question 2 avec le facteur $X^2 + bX + c$
   b) Soit alors $x \in \text{Ker}(f^2 + bf + cId), x \neq 0$ et $F = \text{Vect}(x, f(x))$. Vérifions que F est un plan stable par f :

   - F est engendré par deux vecteurs donc $\dim(F) \leq 2$
   - $x \neq 0$ donc $\dim(F) > 0$
   - si F est une droite stable , il existe un scalaire λ tel que $f(x) = \lambda x$. En reportant dans $(f^2 + bf + cId)(x) = \overrightarrow{0}$ on obtient $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Absurde car le discriminant est strictement négatif.
   - F est stable en regardant l'image de la base : $f(x) \in F$, $f(f(x)) = -bf(x) - cx \in F$

$\boxed{\text{il existe un plan stable de } f}$

4. Puisque M est de degré minimum, $(X-\lambda)^{p-1}$ n'annule pas f, ou, en se ramenant à $g = f - \lambda Id$, $g^p = 0$ et $g^{p-1} \neq 0$, g est nilpotent d'ordre p, en modifiant légèrement la solution de la question III)2)a) (ici on n'a pas $p = n$), on prouve qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille

$$\big(x, g(x), \ldots, g^{p-1}(x)\big)$$

est libre.

Dans la question précédente, $p \geq 2$, donc on peut considérer le plan $F = \mathrm{Vect}(g^{p-2}(x), g^{p-1}(x))$, manifestement stable par g ($g^p(x) = 0$), donc stable par f (question I)4)a)).

5. Séparons les cas :

- M est de degré 1 : f est une homothétie et tout plan de E est stable.
- M admet deux racines réelles distinctes . f admet alors deux valeurs propres distinctes notée λ et μ.Si x est un vecteur propre pour λ et y un vecteur propre pour μ $F = \mathrm{Vect}(x, y)$ est un plan stable par f .
- M admet une unique racine de multiplicité strictement supérieur à 1 . La question 4 permet de conclure.
- M admet une unique racine réelle simple , ou pas de racine . Alors si M est de degré > 1 il existe un facteur du second degré dans M et on peut appliquer la question 3 .

$$\boxed{\text{tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel admet au moins un plan stable.}}$$

Remarque : Le résultat reste vrai pour un espace vectoriel complexe. C'est même plus facile le dernier cas étant impossible.

6.

a) $A^4 = -Id$

b) On en déduit que $X^4 + 1$ est un polynôme annulateur de g . Ce polynôme est bien unitaire.

Il est de plus petit degré : Si on pose $\alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A + \delta I_4 = 0$ le coefficient ligne 1 colonne 4 donne $\alpha = 0$.

et de même $\beta = \gamma = \delta = 0$ en regardant les coefficients de la matrice.

Absurde.$M = X^4 + 1$

c) Les racines de M (dans $\mathbb{C}$) sont : $\exp(i\pi/4), \exp(3i\pi/4), \exp(-3i\pi/4)\exp(-i\pi/4)$.Donc :

$$\begin{aligned} M &= (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - \exp^{-3\pi/4}) \\ &= (X^2 - X\sqrt{2} + 1)(X^2 + X\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Reste à cherche de noyau de $g^2 - \sqrt{2}g + Id$ (par exemple).

7. Un plan stable est Vect $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & & 1 \\ -1 & , & \sqrt{2} \\ 0 & & 1 \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$