

GCP 2001
COMPOSITION de MATHÉMATIQUE II
(Série MP)

v

GCP 2001
Math II MP
Partie I

- 1) En développant par rapport à la première ligne on trouve $\det C_P = (-1)^n a_0$, d'où le résultat.
2) Le plus rapide est de développer par rapport à la dernière colonne, on trouve alors

$$\chi_{C_P}(X) = (-a_{n-1} - X) \begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & 1 & -X \end{vmatrix} + a_{n-2} \begin{vmatrix} -X & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -X & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 1 & -X & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{vmatrix} - \dots$$

et on reconnaît $(-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0) = (-1)^n P(X)$.

remarque : si on développe par rapport à la première ligne on a en notant $\psi(a_0, \dots, a_n)$ le déterminant $\psi(a_0 \dots a_n) = (-1)^n a_0 - X\psi(a_1 \dots a_n)$ et le résultat par récurrence.

Donc $k = (-1)^n$

- 3) Il faut et il suffit que le terme dominant de Q soit $(-1)^n X^n$:

- Si A existe on sait par le cours que le terme dominant du polynôme caractéristique est $(-1)^n X^n$
- Réciproquement si le coefficient est $(-1)^n X^n$ le calcul précédent donne une matrice compagnon qui admet Q comme polynôme caractéristique en partant de $P = (-1)^n Q$

a) Les valeurs propres sont les racines de χ qui se calcule par un déterminant; or le déterminant est invariant par transposition:

$$\det({}^t C_P - I_n) = \det(C_P - \lambda I_n)$$

b) on a ${}^t C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$; si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ il vient le système

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \dots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} \forall i \in [1..n], x_i = \lambda^{i-1} x_1 \\ (-a_0 - a_1 \lambda - \dots - a_{n-1} \lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de

$$X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$$

c) On vient de constater que les espaces propres sont tous limités à des droites; la matrice ${}^t C_P$ est donc diagonalisable si et seulement si il y a assez de telles droites pour engendrer l'espace entier, c'est à dire si P a n racines distinctes (et donc simples).

La réciproque est du cours (puisque $P = \pm \chi_{{}^t C_P}$).

C_p est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples

d) Si P est scindé à racines simples, comme on vient de le voir une matrice de passage qui diagonalise ${}^t C_P$ est $V =$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ qui est inversible puisque matrice de passage ! Bien sûr son déterminant est connu.}$$

5a) Méthode hors programme en PC .

b) Analyse : si f est nilpotente d'ordre n son polynôme caractéristique est $(-1)^n X^n$. Donc $P = X^n$. Ce qui donne l'allure de la matrice à chercher. Construire la base demandée est alors un grand classique sur les matrices nilpotentes:

On commence par utiliser l'hypothèse: on prend un vecteur e_1 tel que $f^{n-1}(e_1)$ soit non nul, on alors $f^n(e_1) = 0$ et on prend les vecteurs $f(e_1) = e_2, \dots, f^k(e_1) = e_{k+1}$.

La famille ainsi construite (e_1, \dots, e_n) est une base: En effet elle est libre (et son cardinal est n) par l'absurde:

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ et s'il existe un i tel que $\lambda_i \neq 0$ on prend p le plus petit . Ainsi $\sum_{i=p}^n \lambda_i f^i(e_1) = 0$ avec $\lambda_p \neq 0$. En composant l'égalité par f^{n-p-1} il reste $\lambda_p f^{n-1}(e_1) = 0$. Absurde.

Dans cette base, on a bien

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II

6) Par hypothèse, on a pour tout $i = 1 \dots n$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = \lambda x_i$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq r_i \|X\|_\infty$$

7) Soit i un indice tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$ (il existe car la famille (x_i) est finie), dans les conditions de la question précédente. On a alors $|\lambda| \leq r_i$, c'est à dire $\lambda \in D_i$.

Ceci est vrai pour n'importe quelle valeur propre, qui appartiendra donc à l'un des disques D_i . Au total,

$$Sp(A) \subset \bigcup_{k=1}^n D_k$$

(qui d'ailleurs n'est autre que le disque $D_{\max(r_i)}$).

8) On va se servir de la première partie ! En effet, les racines de P sont les valeurs propres de sa matrice compagne C_P . Or

$$r_1 = |a_0| \quad r_2 = 1 + |a_1| \quad \dots \quad r_n = 1 + |a_n|$$

comme on le lit sur la matrice C_P . En appliquant la question précédente, on en déduit que toutes les racines de P sont dans le disque $D_R = \bigcup_{k=1}^n D_k$ où $R = \max r_k$.

9) A l'ordre près des exposants on peut supposer que a soit le plus grand des quatre entiers a, b, c, d . Posons

$$P(X) = X^a + X^b - X^c - X^d$$

La matrice C_P ne contient que des $0, \pm 1$ et on a avec les notations de la question précédente $R = 2$.

Les seules racines entières possibles sont donc $0, 1, 2$.

Reste à exclure le dernier cas: or si 2 est racine, on a (avec par exemple $c > d$, sinon c et d jouant des rôles symétriques ...)

$$2^b(1 + 2^{a-b}) = 2^d(1 + 2^{c-d})$$

Donc si $b > d$ on a $2^{b-d}(1 + 2^{a-b}) = (1 + 2^{c-d})$. Un nombre pair est égal à un nombre impair : absurde. de même si $d > b$.

Donc les seules racines dans \mathbb{N} de $n^a + n^b = n^c + n^d$ sont 0 et 1

Partie III

remarque : On généralise dans cette partie l'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre 2 dans le cas où les racines sont simples. Les questions 10, 11, 12 sont les mêmes que la démonstration pour les suites d'ordre 2. Seule la fin change pour vérifier qu'on a une base de solutions avec des suites géométriques.

10) Remplaçons $u(n)$ par λ^n : on a bien $\lambda^{n+p} + a_{p-1}\lambda^{n+p-1} + \dots + a_0\lambda^n = 0$ dès que $P(\lambda) = 0$.

11)

- Tout d'abord, φ est linéaire (ses composantes sont des formes linéaires).
- φ est injective car si $\varphi(u) = (0)$ on a $u(0) = u(1) = \dots = u(p-1) = 0$ et par une récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = 0$. Donc u est la suite nulle.
- φ est surjective car la donnée de $u(0), u(1), \dots, u(p-1)$, donne les conditions initiales qui définissent la suite u .
- **Donc F , isomorphe à \mathbb{C}^p , est de dimension p .**

12a) $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \dots - a_0e_i(0) = -a_i$.

b) Les e_i sont l'image de la base canonique de \mathbb{C}^p par l'isomorphisme φ^{-1} .

remarque : ou bien vérifier aussi libre et bon cardinal.

c) La suite u et la suite $\sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$ sont deux éléments de F qui commencent par les p mêmes termes, à savoir $\varphi(u) = (u(0), u(1), \dots, u(p-1))$.

Elles sont donc identiques: (récurrence évidente)

13) $f(\lambda u + \mu v)$ est par définition la suite de terme général

$$(\lambda u + \mu v)(n+1) = \lambda u(n+1) + \mu v(n+1)$$

C'est donc $\lambda f(u) + \mu f(v)$ ce qui prouve la linéarité de f : ainsi $f \in \mathcal{L}(E)$.

Enfin, la relation de récurrence qui définit F devant être vraie pour tout n sera vraie pour tout $n+1$ ce qui signifie que $f(F) \subset F$, **F est stable par F**

14) Cela résulte de **12a)**: en effet, $e_i(p) = -a_i$ et donc comme

$$e_i = (0, 0, 0, \dots, 0, \underset{\text{rg } i}{1}, 0, \dots, \underset{\text{rg } p}{-a_i}, \dots)$$

$$f(e_i) = (0, 0, 0, \dots, 0, \underset{\text{rg } i-1}{1}, 0, \dots, \underset{\text{rg } p-1}{-a_i}, \dots) = e_{i-1} - a_i e_{p-1}$$

En écrivant ceci en colonnes pour $i = 0 \dots p-1$, on obtient la matrice de f dans la base (e_i) et on reconnaît ${}^t C_P$.

15a) D'après **4c)**, ${}^t C_P$ est diagonalisable et une base de vecteurs propres est donnée par les colonnes de $V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_0 & \dots & \lambda_{p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \dots & \lambda_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$

où les λ_i sont les racines de P .

b) Tout élément de F s'écrit dans cette base qui est constituée de suites géométriques (cf **10**)

$$\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = k_0 \lambda_0^n + \dots + k_{p-1} \lambda_{p-1}^{n-1}$$

16) Les racines de $P(X) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+bc+ca)X - abc$ sont a, b et c .

Ces réels étant supposés distincts, tout est fini: une base de l'espace F est constituée par les trois suites géométriques $(a^n), (b^n), (c^n)$ et tout élément de F s'écrit

$$u_n = \alpha a^n + \beta b^n + \gamma c^n$$

où α, β, γ sont fonction des valeurs initiales u_0, u_1, u_2 .

Partie IV

Notons que par la première partie, $\chi_A = \chi_{C_A} = (-1)^n P$.

17 D'après l'étude du I une matrice compagnon est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. Il suffit de prendre pour A n'importe quelle matrice diagonalisable ayant au moins une valeur propre multiple. $A = I_n$ ou $A = 0$ sont par exemple solution.

remarque : on peut aussi constater que toute matrice compagnon est de rang supérieur à $n-1$. Toute matrice de rang inférieur à $n-2$ convient aussi comme contre exemple.

18) Supposons (**), c'est à dire que (U, C_U) et (V, C_V) sont simultanément semblables: comme le rang est invariant par changement de base, on a donc $U - V = P^{-1}(C_U - C_V)P$ soit :

$$\text{rg}(U - V) = \text{rg}(C_U - C_V) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \bullet \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne peut être nulle: on aurait $\text{rg}(U - V) = 0$ et donc $U = V$ ce qui est exclu. Donc elle est de rang 1, ce qui prouve (*).

$$\boxed{(**) \Rightarrow (*)}$$

19) Il suffit de reprendre un exemple inversible de la question **17** pour U (on est sur que P n'existera pas si U et C_U ne sont pas semblables) puis d'ajouter à U n'importe quelle matrice de rang 1. Par exemple

Prenons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

20) Par le théorème du rang, H est un hyperplan.

21a) Par l'absurde : si $F \subset H$ on a $u_F = v_F$ et donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$. Mais $\chi_{u_F} | \chi_u$ et $\chi_{v_F} | \chi_v$, Toute racine de χ_{u_F} dans \mathbb{C} est racine commune à χ_u et χ_v (et il existe une telle racine car $d^\circ(\chi_{u_F}) = \dim F > 0$).

Donc $F \not\subset H$.

b) Soit $x \in F \setminus H$: alors H et x engendrent E puisque H est un hyperplan et $x \notin H$. Cela signifie que $F + H = E$.

On utilise deux fois le théorème de la base incomplète en partant d'une base de $F \cap H$ que l'on complète dans F , puis dans H . Il existe une base $(f_i) \cup (g_j) \cup (h_k)$, (f_i) base de $F \cap H$, $(f_i) \cup (g_j)$ base de F , $(h_k) \in H$

Si on prend la matrice de u (et v) dans cette base elle est triangulaire par bloc car F est stable par u .

On a par blocs

$$\text{Mat}(u) = \begin{pmatrix} U_1 & ? \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \quad \text{Mat}(v) = \begin{pmatrix} V_1 & ? \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

où les sous-matrices U_2 et V_2 coïncident, puisque $u(x) = v(x)$ pour $x \in H$ (en fait, même les sous-matrices au dessus de celles-ci sont égales aussi).

En calculant par blocs les polynômes caractéristiques on a $\chi_u = \chi_{u_1} \chi_{u_2}$ et $\chi_v = \chi_{v_1} \chi_{v_2}$. Toute racine de $\chi_{u_1} = \chi_{v_1}$ est racine commune de χ_u et χ_v . Absurde.

c) Les seuls sous-espaces stables à la fois par u et v sont E entier et $\{0\}$

22a) u^j est, comme u , un automorphisme, qui conserve la dimension: donc $G_j = u^{-j}(H)$ est, comme H , un hyperplan.

b) On a $\dim G_0 = \dim H = n - 1, \dim G_0 \cap G_1 \geq n - 2, \dots, \dim G_0 \cap \dots \cap G_{n-2} \geq 1$ en vertu du

car si H_1 est un hyperplan et F un sev, on a $\dim(F \cap H_1) \geq \dim F - 1$. car $F \cap H_1 = F$ ou est un hyperplan de F .

c) Un tel y existe d'après la question précédente.

La famille $\{y, u(y), \dots, u^q(y)\}$ ne peut être libre pour toute valeur de p (elle est lie dès que $q > n$), soit donc p maximal tel que la famille $\mathcal{F} = \{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$ soit libre et $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$

Nous voulons montrer que $F = E$ c'est à dire que $p = n$.

- On a $u^p(y) \in F$ par définition de p . Et par récurrence $q \geq p, u^q(y) \in F$
- D'abord notons que $e_0, e_1, \dots, e_{n-2} \in H$ par définition même de y .
Supposons par l'absurde $p < n$, on a donc $F \subset H$.
- F est stable par u car l'image par u de la base \mathcal{F} est encore dans $F : u^p(y) \in F$
- pour tout $x \in F$ on a $v(x) = u(x) \in F$ puisque $F \subset H$ et $v_F = u_F$. Donc F est stable par v lui aussi.
- Nous sommes arrivés à une impossibilité d'après **21c**).

Donc $F = E, p = n$ et

$$\boxed{B'' = \mathcal{F} \text{ est une base de } E}$$

d) On a $u(e_i) = u(u^i(y)) = u^{i+1}(y) = e_{i+1}$ pour $i \leq n-1$. La matrice de u dans la base \mathcal{B}'' est donc une matrice compagnon. Soit P le polynôme tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = C_P$. On a $P = (-1)^n \chi_{C_P} = (-1)^n \chi_U$. Donc $C_P = C_U$.

e) Récapitulons: on a montré que le changement de base vers \mathcal{F} change U (resp. V) en C_U (resp. C_V). Nous avons donc montré (**).

Si les polynômes caractéristiques n'ont pas de racine commune (*) \Rightarrow ()**