CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE
MATH 2001 PC

Partie I

I.1. Si $A=0$ alors ${}^tAA=0$.

Pour la réciproque on calcule les coefficients diagonaux de ${}^tAA$:

$$\forall i\in\{1,2,...,p\}\ ,\ \left({}^tAA\right)_{i,i}=\sum_{k=1}^{n}\left(A_{k,i}\right)^2$$

Les coefficients étant réels on a une somme de réels positifs. La somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

Donc si ${}^tAA=0$, pour tout $k\in\{1,2,...,n\}$ et pour tout $i\in\{1,2,...,p\}$, $(A)_{k,i}=0$

$$\boxed{{}^tAA=0 \text{ si et seulement } A=0}$$

Remarque : En utilisant la forme matricielle du produit scalaire on peut montrer que $\mathrm{Ker}(A)=\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$X\in\mathrm{Ker}(A)\Rightarrow\|AX\|^2={}^tX{}^tAAX=0$ *donc* $AX=0$ *et donc* $\mathrm{Ker}(A)=M_{n,1}(\mathbb{R})$ *et* $A=0$.*Mais comme on utilise une question qui suit ce n'est pas la meilleure méthode ici.*

désormais A est supposée non nulle donc ${}^tAA\neq 0$

I.2. ${}^tAA\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, c'est une matrice symétrique réelle , elle est donc diagonalisable au moyen de matrices orthogonales.

$A{}^tA\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est une matrice symétrique réelle , elle est donc aussi diagonalisable au moyen de matrices orthogonales.

I.3.

a)question de cours $\boxed{\langle X|Y\rangle_n={}^tXY={}^tYX}$

b) W est un vecteur propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ, donc $W\neq 0$ et ${}^tAAW=\lambda W$

donc $\|AW\|_n^2={}^t(AW)AW={}^tW\left({}^tAAW\right)={}^tW(\lambda W)=\lambda{}^tWW=\lambda\|W\|_p^2$:

$$\boxed{\|AW\|_n^2=\lambda\|W\|_p^2}$$

c) On sait déjà que toutes les valeurs propres sont réelles.
$\|W\|_p^2>0$ (car W vecteur propre est non nul) et $\|AW\|_n^2\geq 0$ donc $\lambda\geq 0$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } {}^tAA \text{ sont donc réelles, positives ou nulles}}$$

I.4

a) $\begin{pmatrix} xI_n & A\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & (0)_{n,p}\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A{}^tA-xI_n & A\\ (0)_{p,n} & I_p\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} xI_n & A\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & A\\ (0)_{p,n} & -xI_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -xI_n & 0_{n,p}\\ -{}^tA & {}^tAA-xI_p\end{pmatrix}$

b) D'après le déterminant d'une matrice diagonale par blocs on sait que $\det\begin{pmatrix} A & B\\ (0) & C\end{pmatrix}=\det(A)\det(B)$ si A et B sont des matrices carrées.

On sait aussi que $\det(A.B)=\det(A)\det(B)$

Si on désigne par P_M le polynôme caractéristique d'une matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P_M(x)=P(M-xI_n)$

On a donc :

$$\det\left(\begin{pmatrix} xI_n & A\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p}\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}\right)=\det\begin{pmatrix} xI_n & A\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} -I_n & (0)_{n,p}\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}=(-1)^n\det\begin{pmatrix} xI_n & A\\ {}^tA & I_p\end{pmatrix}$$

et

$$\det\begin{pmatrix} A{}^tA-xI_n & A\\ (0)_{p,n} & I_p\end{pmatrix}=P_{A{}^tA}(x)$$

donc

$$P_{A^tA}(x) = (-1)^n \det \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix}$$

de même avec l'autre produit

$$(-1)^n (-x)^p \det \begin{pmatrix} xI_n & A \\ {}^tA & I_p \end{pmatrix} = (-x)^n P_{{}^tAA}(x)$$

donc $\boxed{(-x)^n P_{{}^tAA}(x) = (-x)^p P_{A^tA}(x)}$

Donc si α est racine non nul de $P_{{}^tAA}$ de multiplicité k alors $(X-\alpha)^k$ divise $P_{{}^tAA}$ donc aussi P_{A^tA} et réciproquement.

$$\boxed{{}^tAA \text{ et } A^tA \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles avec le même ordre de multiplicité}}$$

c) Si on calcule le rang dans une base de vecteur propre on constate que , pour une matrice diagonalisable , le rang est égal au nombre de valeurs propres non nuls en comptant la multiplicité)

$$\boxed{{}^tAA \text{ et } A^tA \text{ ont même rang.}}$$

I.5. Si $n > p$, $P_{A^tA}(x) = (-x)^{n-p} P_{{}^tAA}(x)$ donc 0 est racine de P_{A^tA} :

$$\boxed{\text{si } n > p \text{ , 0 est valeur propre de } A^tA \text{ et si } n < p, \text{ 0 est valeur propre de } {}^tAA}$$

I.6. Les λ_i sont des réels positifs (**I.3**) donc les μ_i sont bien définis et sont des réels positifs.

Il existe une base orthonormale (V_j) de vecteurs propres car la matrice est symétrique réelle.

a) A étant non nulle, ${}^tAA$ est non nulle, elle est diagonalisable, elle a donc au moins une valeur propre non nulle. (la seule matrice diagonalisable dont le spectre est réduit à 0 est la matrice nulle) Toutes ses valeurs propres sont positives, donc la plus grande des valeurs propres est strictement positive :

$$\boxed{\lambda_1 > 0}$$

b) La somme des ordres de multiplicité des valeurs propres non nulles de ${}^tAA$ est égale à r
donc $r = rang({}^tAA) = rang(A^tA)$ d'après **I.4.c.**
$A\ {}^tA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\boxed{r \leq n}$ et d'après le théorème du rang ,

$$\boxed{\dim(KerA^tA) = n - r}$$

c) $\boxed{\text{Pour tout } i \in \{1, 2, .., r\},\ AV_i = \mu_i U_i}$ par définition des U_i
si $r > p$, pour tout $i \in \{r+1, .., p\}$, $\lambda_i = 0$, ${}^tAAV_i = 0$, $\|AV_i\|_n^2 = {}^tV_i^tAAV_i = 0$,

$$\boxed{\text{si } r > p \text{ , pour tout } i \in \{r+1, .., p\} \text{ , } AV_i = 0}$$

si $i > r$ $\mu_i = 0$ on ne peut toutefois pas dire $AV_i = \mu_i U_i$ car U_i peut ne pas exister si $p > n$. Dans la suite il faut distinguer $i \leq r$ et $i > r$.

d) Pour tout $i \in \{1, 2, .., r\}$, ${}^tAU_i = \frac{1}{\mu_i}({}^tAAV_i) = \frac{\lambda_i}{\mu_i} V_i = \mu_i V_i$

$$\boxed{\text{pour tout } i \in \{1, 2, .., r\},\ {}^tAU_i = \mu_i V_i}$$

e) Si $n > r$, pour tout $i \in \{r+1, .., n\}$, $U_i \in KerA^tA$,donc $A^tAU_i = 0$ et donc $\|{}^tAU_i\|_p^2 = {}^tU_i\,(A^tAU_i) = 0$,

$$\boxed{\text{si } n > r, \text{ pour tout } i \in \{r+1, .., n\} \text{ , } {}^tAU_i = 0}$$

f) Pour tout $i \in \{1, 2, .., r\}$, pour tout $j \in \{1, 2, .., r\}$,
$\langle U_i | U_j \rangle = \frac{1}{\mu_i \mu_j}\,{}^t(AV_i)(AV_j) = \frac{1}{\mu_i \mu_j}\,{}^tV_i\,({}^tAAV_j) = \frac{\lambda_j}{\mu_i \mu_j}\langle V_i | V_j \rangle = \delta_{ij}$ puisque $\lambda_j = \mu_j^2$ et que (V_j) est une base orthonormale.
si $n > r$, par définition $(U_{r+1}, ..U_n)$ est une famille orthonormale,
pour tout $i \in \{1, 2, .., r\}$, pour tout $j \in \{r+1, .., n\}$, $\langle U_i | U_j \rangle = \frac{1}{\mu_i}({}^tV_i{}^tA)U_j = 0$
puisque ${}^tAU_j = 0$
$\underline{(U_1, U_2, .., U_n) \text{ est donc une base orthonormale de } \mathbb{R}^n}$
de plus si $1 \leq i \leq r$, $A^tAU_i = A(\mu_i V_i) = \mu_i^2 U_i = \lambda_i U_i$
si $r < n$, $r+1 \leq i \leq n$, $A^tAU_i = 0$, donc

$$\boxed{(U_1, U_2, .., U_n) \text{ est une base orthonormale de vecteurs propres de } A^tA}$$

$$\begin{cases} \text{pour tout } i \in \{1, 2, .., r\} \ , \ U_i \text{ est associé à la valeur propre } \lambda_i \\ \text{pour tout } i \in \{r+1, .., n\} \ , \ U_i \text{ est associé à la valeur propre } 0 \end{cases}$$

I.7.

a) Pour calculer $({}^tUAV)_{ij}$ on fait le produit de la ligne i de ${}^tU$ et de la colonne j de AV. On reconnaît donc le produit scalaire de U_i par AV_j ou par 0 :

$$\begin{aligned} \forall (i,j) &\in \{1, 2, .., n\} \times \{1, 2, .., r\} \ , \ \left({}^tUAV\right)_{ij} = \langle U_i | AV_j \rangle = \mu_j \langle U_i | U_j \rangle = \mu_j \delta_{ij} \\ \forall (i,j) &\in \{1, 2, , .., n\} \times \{r+1, .., p\} \ , \ \left({}^tUAV\right)_{ij} = \langle U_i | 0 \rangle = 0 = \mu_j \delta_{ij} \end{aligned}$$

car la base (U_i) est orthonormée.

$$\boxed{\forall (i,j) \in \{1, 2, .., n\} \times \{1, 2, .., p\} \ , \ ({}^tUAV)_{ij} = \mu_j \delta_{ij}}$$

b) On a donc ${}^tUAV = \Delta$ car pour $j > r$ $\mu_j = 0$

Les vecteurs colonnes de U constituent une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, donc U est une matrice orthogonale, $U \in O(n)$, U est inversible et $U^{-1} = {}^tU$

De même $V \in O(p)$ et V est inversible avec $V^{-1} = {}^tV$

Donc, en multipliant l'égalité ${}^tUAV = \Delta$ à droite par ${}^tV$ et à gauche par U on obtient :

$$\boxed{A = U\Delta^tV}$$

c) ${}^tA_0A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, On a bien deux vecteurs normés et orthogonaux.

On prend alors $U_3 = U_1 \wedge U_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

On vérifie bien que (U_3) est une base de $Ker\,(A_0{}^tA_0)$ avec $A_0{}^tA_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{A_0 = U_0\Delta^tV_0 \text{ avec } U_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \ , \ \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ {}^tV_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

${}^tB_0B_0 = (2\,)$, $V_1 = (1)$, $U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{B_0 = U_0\Delta^tV_0 \text{ avec } U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ , \ \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ {}^tV_0 = (1)}$$

I.8. U et ${}^tV$ sont des matrices inversibles, donc le rang de A est égal au rang de Δ (matrices équivalentes) donc

$$\boxed{rang(A) = r}$$

I.9. *Dessiner des produits de matrices pour bien voir ce qui se passe . Utiliser les exemples en petite taille.*

a) $V_i{}^tE_i$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la i-ème égale à V_i,

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{p} V_i{}^tE_i}$$

b) On a de même $U=\sum_{j=1}^{n}U_j{}^tF_j$
donc $A=U\Delta\ {}^tV=\left(\sum_{j=1}^{n}U_j{}^tF_j\right)\Delta^t\left(\sum_{i=1}^{p}V_i{}^tE_i\right)=\sum_{i,j}U_j{}^tF_j\Delta E_i{}^tV_i$
Or pour $j\leq r$: ${}^tF_j\Delta=\left(0\cdots0,\mu_j,0\cdots0\right)=\mu_j\,{}^tE_j$ et donc ${}^tF_j\Delta E_i=\mu_j^tE_jE_i=\mu_j\delta_{i,j}$
Et pour $j>r$ ${}^tF_j\Delta=0$ donc ${}^tF_j\Delta E_i=0$

$$\boxed{A=\sum_{j=1}^{r}\mu_jU_j{}^tV_j}$$

tous les termes pour $i\neq j$ et pour $j>r$ étant nuls.

${}^tAA=\ {}^tA\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_iU_i{}^tV_i\right)=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\left({}^tAU_i\right){}^tV_i$, or ${}^tAU_i=\mu_iV_i$ et $\lambda_i=\mu_i^2$, (car $i\leq r$) donc

$$\boxed{{}^tAA=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iV_i{}^tV_i}$$

En transposant la formule qui donne A on obtient : ${}^tA=\sum_{i=1}^{r}\mu_iV_i{}^tU_i$,
donc $A^tA=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\left(AV_i\right){}^tU_i=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\left(\mu_iU_i\right)^tU_i$, donc

$$\boxed{A^tA=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iU_i{}^tU_i}$$

c) Soit $X\in\mathbb{R}^p$, ${}^tV_iX=\langle V_i|X\rangle$, donc

$$AX=\left(\sum_{i=1}^{r}\mu_iU_i{}^tV_i\right)X=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\left\langle V_i|X\right\rangle U_i$$

$(U_1,U_2,..,U_r)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, pour tout $i\in\{1,2,..,r\}$, $\mu_i\neq0$
donc $AX=0$ si et seulement si pour tout $i\in\{1,2,..,r\}$, $\langle V_i|X\rangle=0$
$(V_1,V_2,...,V_p)$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$,

$$\boxed{\text{si } r<p\text{ , Ker}(A)=\text{Vect}\left(V_{r+1},..,V_p\right)\text{ et si } r=p\text{ , Ker}(A)=\{0\}}$$

Par un raisonnement analogue, si $Y\in\mathbb{R}^n$, ${}^tAY=\sum_{i=1}^{r}\mu_i\left\langle U_i|Y\right\rangle V_i$

$$\boxed{\text{si } r<n\text{ , Ker}\left({}^tA\right)=\text{Vect}\left(U_{r+1},..,U_n\right)\text{ et si } r=n\text{ , } Ker\left({}^tA\right)=\{0\}}$$

pour tout $X\in\mathbb{R}^p$, $AX\in\text{Vect}(AV_1,\cdots,AV_p)=\text{Vect}\left(U_1,..,U_r\right)$ donc $\text{Im}\,A\subset\text{Vect}\left(U_1,..,U_r\right)$

or $\dim(\text{Im}\,(A))=rg(A)=r$ donc

$$\boxed{\text{Im}\,A=Vect\left(U_1,U_2,..,U_r\right)}$$

et on obtient de même

$$\boxed{\text{Im}\left({}^tA\right)=Vect(V_1,V_2,..,V_r)}$$

d) $KerA\subset Ker\left({}^tAA\right)$, de plus A et ${}^tAA$ ont le même rang r
donc $\dim\left(KerA\right)=p-r$ et $\dim\left(Ker({}^tAA)\right)=p-r$, donc

$$\boxed{Ker\,A=Ker\left({}^tAA\right)}$$

Un raisonnement analogue permet de démontrer que:

$$\boxed{Ker\left({}^tA\right)=Ker\left(A^tA\right)}$$

PARTIE II

D'après la première partie toute matrice non nulle admet une décomposition en valeurs singulières.
Mais le sujet ne dit pas explicitement que pour une décomposition en valeurs singulières les matrice U et V sont obligatoirement construites selon la méthode du I. On peut toutefois vérifier réciproquement que si $A = U\Delta {}^tV$ alors le carré des termes "diagonaux" de Δ sont les valeurs propres de ${}^tAA$ et de $A{}^tA$ et que les colonnes de U et V vérifient les conditions imposées en première partie.
Enfin le sujet semble dire que l'on peut admettre l'unicité avant de l'avoir démontrer.
II.1. On déduit de **I.7.b** que

$$\Delta^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où après calculs que

$$A_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$A_0A_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad A_0^+A_0 = I_2$$

puis

$$A_0A_0^+A_0 = A_0 \qquad A_0^+A_0A_0^+ = A_0^+.$$

II.2. Avec les notations du **I.7** on a $A_0^+ = V_0\Delta^+\,{}^tU_0$ Comme U_0 et V_0 sont orthogonales et que Δ_0^+ est du type voulu, $A_0^+ = V_0\Delta_0^+\,{}^tU_0$ est une décomposition de A_0^+ en valeurs singulières, d'où l'on déduit que $(A_0^+)^+ = U_0(\Delta_0^+)^+\,{}^tV_0 = U_0\Delta_0\,{}^tV_0 = A_0$.

$$\boxed{(A_0{}^+)^+ = A_0}$$

En procédant ainsi on fait déjà la question 10 dans un cas particulier. Mais c'est bien plus rapide que de faire les calculs comme en **I.7.c**
II.3 . Le calcul se fait sur le même principe que pour le produit de deux matrices diagonales:

$$\boxed{\Delta\Delta^+ = \begin{pmatrix} I_r & (0)_{r,p-r} \\ (0)_{p-r,r} & (0)_{p-r} \end{pmatrix}_p, \ \Delta^+\Delta = \begin{pmatrix} I_r & (0)_{r,n-r} \\ (0)_{n-r,r} & (0)_{n-r} \end{pmatrix}_n}$$

On obtient des matrices J_r usuelles mais de taille différentes.
II.4 . Si $n = p = r$, ce qui précède prouve que $\Delta^+ = \Delta^{-1}$, de plus $V = ({}^tV)^{-1}$ et ${}^tU = U^{-1}$, car U et V sont orthogonales. Donc

$$\boxed{A^+ = A^{-1}}$$

II.5 .
Le résultat du **I.9.a** appliqué à $A^+ = V\Delta^+\,{}^tU$ donne :

$$\boxed{A^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} V_i\,{}^tU_i}$$

D'autre part, en utilisant l'égalité $A = \sum_{j=1}^r \mu_j U_j\,{}^tV_j$ trouvée en **I.9.b**

$$AA^+ = \sum_{\substack{i=1..r\\ j=1..r}} \frac{\mu_j}{\mu_i} U_j\,{}^tV_j\,V_i\,{}^tU_i.$$

Or pour tous i et j dans $[\![1,p]\!]$, ${}^tV_j\,V_i = \langle V_j \mid V_i\rangle = \delta_{i,j}$ car $(V_1,\ldots,V_p)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^p$. D'où

$$\boxed{AA^+ = \sum_{i=1}^r U_i\,{}^tU_i}$$

De la même façon,en échangeant les rôles de U et V, comme $(U_1,\ldots,U_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{A^+A = \sum_{i=1}^n V_i\,{}^tV_i}$$

II.6.a.
Pour $j \le n$: $AA^+U_j = \sum_{i=1}^r U_i\,{}^tU_i\,U_j = \sum_{i=1}^r \langle U_i \mid U_j\rangle\, U_i = \sum_{i=1}^r \delta_{i,j}\,U_i$.
Finalement, $AA^+U_j = \begin{cases} U_j \text{ si } j \le r \\ 0 \text{ si } j > r \end{cases}$
Si ϕ est l'endomorphisme associé à AA^+ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on obtient que la matrice de ϕ dans la base (U_j) est une matrice J_r qui est la forme canonique de la matrice d'une projection. Comme la base est orthonormale cette projection est orthogonale.

ϕ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Vect}(U_1,\ldots,U_r)$. Or par construction les $(V_i)_{i=1}^p$ est une base de $\mathbb{R}^p$, donc les $(U_i)_{i=1}^p$ engendre $\mathrm{Im}(A)$ En retirant les vecteurs nuls les $(U_i)_{i=1}^r$ engendrent $\mathrm{Im}(A)$. (c'est même une base car le système est orthonormale)

$$\boxed{\phi \text{ est la projection orthogonale de } \mathbb{R}^n \text{ sur } \mathrm{Im}(A).}$$

II.6.b. Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,
$A^+AV_j = \sum_{i=1}^r V_i\,{}^tV_i\,V_j = \sum_{i=1}^r \langle V_i\,|\,V_j\rangle\, V_i = \sum_{i=1}^r \delta_{i,j}\,V_i$.
Soit $A^+AV_j = \begin{cases} V_j \text{ si } j \le r \\ 0 \text{ si } j > r \end{cases}$.
Par construction les $(V_i)_{i=1}^n$ est une base orthonormale telle que $(V_j)_{j=r+1}^n$ soit une base de $\mathrm{Ker}({}^tAA) = \mathrm{Ker}(A)$ d'après la question **I.9.d**
<u>l'endomorphisme associé à A^+A dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$ sur $(\mathrm{Ker}(A))^\perp$.</u>

II.7.

- AA^+ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, orthonormée pour le produit scalaire canonique, d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$: elle est donc symétrique .

  A^+A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, orthonormée pour le produit scalaire canonique, d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^p$: elle est donc symétrique .

$$\boxed{AA^+ = {}^t(AA^+)\ ,\ A^+A = {}^t(A^+A)}$$

- On

$$(AA^+)\,A = \sum_{\substack{i=1..r\\ j=1..r}} \mu_i\,U_j\,{}^tU_jU_i\,{}^tV_i = \sum_{i=1}^r \mu_i U_i\,{}^tV_i$$

  toujours car ${}^tU_jU_i = \delta_{i,j}$.
  Même calcul pour $(A^+A)\,A^+$

$$\boxed{AA^+A = A\ ,\ A^+AA^+ = A^+}$$

II.8. On sait que $\mathrm{Im}(MN) \subset \mathrm{Im}(M)$ et $\mathrm{Ker}(N) \subset \mathrm{Ker}(MN)$. On en déduit alors immédiatement à l'aide de **II.7**

- $\left.\begin{array}{l}\mathrm{Im}(AA^+) \subset \mathrm{Im}(A)\\ \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AA^+A) \subset \mathrm{Im}(AA^+)\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AA^+)}$.
- $\left.\begin{array}{l}\mathrm{Ker}(A^+) \subset \mathrm{Ker}(AA^+)\\ \mathrm{Ker}(AA^+) \subset \mathrm{Ker}(A^+(AA^+)) = \mathrm{Ker}(A^+)\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(A^+) = \mathrm{Ker}(AA^+)}$
- $\left.\begin{array}{l}\mathrm{Im}(A^+A) \subset \mathrm{Im}(A^+)\\ \mathrm{Im}(A^+) = \mathrm{Im}(A^+AA^+) \subset \mathrm{Im}(A^+A)\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\mathrm{Im}(A^+) = \mathrm{Im}(A^+A)}$
- $\left.\begin{array}{l}\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^+A)\\ \mathrm{Ker}(A^+A) \subset \mathrm{Ker}(A(A^+A)) = \mathrm{Ker}(A)\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\mathrm{Ker}(A^+A) = \mathrm{Ker}(A)}$
- AA^+ est la matrice d'une projection (orthogonale) de $\mathbb{R}^n$, donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(AA^+) \oplus \mathrm{Ker}(AA^+)$.

De même comme (A^+A) est la matrice d'une projection de $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p = \mathrm{Im}(A^+A) \oplus \mathrm{Ker}(A^+A)$.

$$\boxed{\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A^+) \qquad \mathbb{R}^p = \mathrm{Im}(A^+) \oplus \mathrm{Ker}(A)}$$

II.9 .
II.9.a.

- i) $B = B(AB) = B^t(BA) = B^tB^tA$ et $B = (BA)B = {}^tA\,{}^tB\,B$.
- ii) $A = (AB)A = {}^tB\,{}^tA\,A$ et $A = A(BA) = A^tA\,{}^tB$.
- iii) ${}^tA = B\,A\,{}^tA = {}^tAAB$ en transposant les égalités ii).

II.9.b. Comme A^+ vérifie les hypothèses de cette question, elle vérifie, comme B les identités i), ii) et iii).
On doit donc montrer que si deux matrices B et C vérifient les hypothèses de **II9** (et donc i) , ii) et iii)) elles sont égales.On part de B pour trouver C . On commence donc par i) .le morceau ${}^tA$ permet d'introduire C ... et l'expression se simplifie par ii) pour donner une forme symétrique en B et C . On recommence symétriquement avec C en mettant A à gauche:

$$\begin{array}{rll} B & = B^tB^tA & \text{car } B \text{ vérifie i)} \\ & = B^tB^tAAAC & \text{car } C \text{ vérifie iii)} \\ & = BAC & \text{car } B \text{ vérifie ii)} \\ \text{de même } C & = {}^tA^tCC & \text{car } C \text{ vérifie i)} \\ & = BA^tA^tCC & \text{car } B \text{ vérifie iii)} \\ & = BAC & \text{car } C \text{ vérifie ii)} \end{array}$$

Si on a deux décompositions en matrices singulières de A les deux matrices A^+ obtenues vérifient **II7** et sont donc égales.
II.10. deux plans possibles

- utiliser **II9**
  $(A^+)^+$ est l'unique matrice $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant
  $A^+B = {}^t(A^+B) \quad BA^+ = {}^t(BA^+) \quad A^+BA^+ = A^+ \quad BA^+B = B$
  Comme $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et que A vérifie ces quatre relations
- utiliser $(\Delta^+)^+ = \Delta$
  Comme $A^+ = V\Delta^+\,{}^tU$ est une décomposition en valeurs singulières de A^+ on a par unicité $(A^+)^+ = U\,(\Delta^+)^+\ {}^tV = A$
  $$\boxed{(A^+)^+ = A}$$
- pour ${}^tA$ et en utilisant le second plan:
  ${}^t(A^+) = U^t(\Delta^+)^t\,V = U\Delta^+\,{}^tV$
  ${}^tA = V\Delta^tU$ est une décomposition en valeurs singulières de ${}^ttA$ donc $({}^tA)^+ = U\Delta^+\,{}^tV$
  $$\boxed{({}^tA)^+ = (A^+)}$$

II.11. Soit $C_0 = A_0B_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Cherchons C_0^+ sous la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ pour que les identités de **II9** soient vérifiées.(on peut aussi reprendre le plan de calcul de A_0^+)

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} =. \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 0 & 0 & 0 \\ -2a & -2b & -2c \end{pmatrix}$ est symétrique si et seulement si $c = -a$ et $b = 0$, ce que l'on suppose acquis pour la suite des calculs.
- $\begin{pmatrix} a & 0 & -a \end{pmatrix} C_0 \in \mathcal{M}_{11}(\mathbb{R})$ est toujours symétrique.
- $C_0\begin{pmatrix} a & 0 & -a \end{pmatrix} C_0 = \begin{pmatrix} 8a \\ 0 \\ -8a \end{pmatrix}$ d'où $a = \frac{1}{4}$
- On vérifie que la quatrième relation est vraie

On a donc
$$(A_0B_0)^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$
A partir de la décomposition de B_0 en valeurs singulières :$B_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et donc
$$B_0^+A_0^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \neq (A_0B_0)^+$$

II.12.*bonne révision des projections orthogonales .*
II.12.a . Pour tout $H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, AA^+H est le projeté orthogonal de H sur $\operatorname{Im} A$, donc $H - AA^+H$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$ d'où
$$\boxed{(AX - A\overline{H}) \perp (H - A\overline{H})}$$
En utilisant Pythagore,
$\| AX - H \|_n^2 = \| AX - A\overline{H} \|_n^2 + \| H - A\overline{H} \|_n^2$, d'où $\| AX - H \|_n^2 \geq \|A\overline{H} - H \|_n^2$. Or AX décrit $\operatorname{Im}(A)$ et $A\overline{H}$ est l'élément de $\operatorname{Im}(A)$ rendant minimum $\| AX - H \|_n$ $\boxed{d(H, \operatorname{Im}(A)) = \|A\overline{H} - H\|_n}$

II.12.b. S'il existe $\tilde{H} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\| A\tilde{H} - H \|_n = \| A\overline{H} - H \|_n = d(H, \operatorname{Im} A)$, alors par unicité du projeté orthogonal de H sur $\operatorname{Im} A$, $A\tilde{H} = A\overline{H}$, soit $\tilde{H} - \overline{H} \in \operatorname{Ker} A$.
On a alors $\tilde{H} = \overline{H} + (\tilde{H} - \overline{H})$ avec $\overline{H} \in \operatorname{Im}(A^+) = (\operatorname{Ker} A)^\perp$ et $\tilde{H} - \overline{H} \in \operatorname{Ker} A$.
Par Pythagore, $\| \tilde{H} \|_p^2 = \| \overline{H} \|_p^2 + \| \tilde{H} - \overline{H} \|_p^2$. Si de plus $\tilde{H} \neq \overline{H}$, $\| \tilde{H} - \overline{H} \|_p^2 > 0$ et donc

$$\| \overline{H} \|_p < \| \tilde{H} \|_p$$

II.12.c. $\inf \| A_0 X - H \|_3 = \| A_0 A_0^+ H - H \|_3 = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{3}$