math II
Ecole polytechnique (X)
1999
PREMIERE PARTIE.

1.Si $P(x)=\sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, il vient :

$$L(P)=\int_{-1}^{1}P(x)dx=\sum_{p=0}^{n}a_p\int_{-1}^{1}x^p dx=2\sum_{p=0}^{E(n/2)}\frac{a_{2p}}{2p+1}$$

L'application L étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan de dimension n ($\dim(E)=n+1$), qui contient tous les polynômes impairs, ainsi que les polynômes pairs vérifiant $\sum_{p=0}^{E(n/2)}\frac{a_{2p}}{2p+1}$. Par exemple :

- si $n=2k$: $(x,x^3,\ldots,x^{2k-1},1-3x^2,1-5x^4,\ldots,1-(2k+1)x^{2k})$.
- si $n=2k+1$: $(x,x^3,\ldots,x^{2k+1},1-3x^2,1-5x^4,\ldots,1-(2k+1)x^{2k})$.
- Dans les deux cas , même si les vecteurs ne ont pas dans le bon ordre la famille est étagée en degré, donc c'est une base.

2. (revoir les cours si besoin est)

2.a) Il s'agit du i-ième polynôme de Lagrange :

$$P_i(x)=\prod_{k\neq i}\frac{x-x_k}{x_i-x_k},\quad (\forall\ 0\leq i\leq n)$$

2.b) On sait que la famille $(P_0,\ldots,P_n)$ forme une base de E et que pour tout polynôme P :

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}P(x_i)P_i(x)$$

et

$$L(P)=\sum_{i=0}^{n}P(x_i)\int_{-1}^{1}P_i(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)$$

Ainsi $\lambda_i=\int_{-1}^{1}P_i(x),\quad (0\leq i\leq n)$ est une solution du problème .

Et elle est unique car si $\forall P:\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i P(x_i)$ le choix de $P=L_j$ montrer $\lambda_j=\mu_j$.

On a unicité car si $\forall P\in E,\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P(x_i)=\sum_{i=0}^{n}\mu_i P(x_i)$ le calcul dans le cas particulier $P=P_j$ donne $\lambda_j=\mu_j$

3. On suppose que pour tout $i, 0\leq i\leq n, x_{n-i}=-x_i$.

♦ On a

$$P_{n-i}(x)=\prod_{k\neq n-i}\frac{x-x_k}{x_{n-i}-x_k}=\prod_{k\neq n-i}\frac{x+x_{n-k}}{x_{n-k}-x_i}$$

Si on fait le changement d'indice $j=n-k$ on a :

$$P_{n-i}(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x+x_j}{x_j-x_i}=\prod_{j\neq i}\frac{-x-x_j}{x_i-x_j}=P_i(-x)$$

♦On a donc

$$\lambda_{n-i}=\int_{-1}^{1}P_{n-i}(t)dt=\int_{1}^{-1}P_{n-i}(-u)-du=\int_{-1}^{1}P_i(u)du$$

en faisant le changement de variable C^1 $u=-t$

♦ comme n est pair on remarque que pour $i=n/2$ on a $x_{n/2}=-x_{n/2}$ donc $x_{n/2}=0$

Le résultat est vrai pour tout polynôme de degré $\leq n$. Par linéarité il suffit donc de le vérifier pour X^{n+1} .Mais dans ce cas:

$$\int_{-1}^{1}x^{n+1}dx=0\ ,\ \lambda_{n/2}x_{n/2}^{n+1}=0\ ,\ 0\leq i<n/2\Rightarrow\lambda_i x_i^{n+1}+\lambda_{n-i}x_{n-i}^{n+1}=\lambda_i(x_i^{n+1}+(-x_i)^{n+1})=0$$

donc

$$L(x^{n+1})=0=\sum_{i=0}^{n}\lambda x_i^{n+1}$$

4.

4.1 Soit P_n le polynôme de Taylor de f à l'ordre n en 0 .

Ecrivons l'inégalité de Taylor Lagrange à l'ordre n pour f. :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

donc pour tout $i \in [0..n], |f(x_i) - P_n(x_i)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |x_i|^{n+1} \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ et
$\left|\int_{-1}^{1} f(t) - P_n(t)dt\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} |t|^{n+1} dt = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{2}{n+2}$ et donc comme $L(P_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_n(x_i)$car $P_n \in E$:

$$\left|\int_{-1}^{1} f(t) - \sum \lambda_i f(x_i)\right| = \left|\int_{-1}^{1} f(t) - P_n(t)dt - \sum_{i=0}^{n} P_n(x_i) - f(x_i)\right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} (\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i| + \frac{2}{n+2})$$

4.2 Recommençons la même argumentation avec $f \in C^{n+2}$.

$$|f(x) - P_{n+1}(x)| \leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} |x|^{n+2}$$

Donc, par la question 3. :$L(P_{n+3}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_{n+3}(x_i)$ le même calcul donne

$$\left|\int_{-1}^{1} f(t) - \sum \lambda_i f(x_i)\right| \leq \frac{M_{n+2}}{(n+2)!} \left(\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i| + \frac{2}{n+3}\right)$$

5.

5.1 Puisque les calculatrices sont autorisées, voici un programme, écrit pour la TI-89/92, qui calcule les polynômes de Lagrange :

```
lagr(x,w)            (x :  liste des points, w :  variable)
Func
Local i,j,p,r
{} →r                  (r est l'ensemble vide )
For j,1,5 1→p            (l'indice d'une liste commence à 1 pas à 0)
 For i,1,5              (cette boucle crée le polynôme de Legendre)
 If i≠j Then
        (w-x[i])/(x[j]-x[i])*p→p
     EndIf
  EndFor
  augment({p},r)→r
 EndFor
r
EndFunc
```

et $\int$(lagr({1,-1/2,0,1/2,1},x),x,-1,1) donne : $(7/45, 32/45, 4/15, 32/45, 7/45)$.
Si on veut un programme général il suffit de remplacer les 6 des boucles par dim(x)
voir à la fin une adaptation MAPLE .
On peut aussi poser le système

$$\int_{-1}^{1} t^k dt = \sum_{i=0}^{4} \lambda_i x_i^k \text{ pour } k = 0 \cdots 4$$

On a un système 5×5 d'inconnues λ_i à résoudre mais d'après 13 on peut se ramener à un système à 3 inconnues .

5b) Il vient :

$$\left|\int_{-1}^{1} e^{(x/4)^2} - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i e^{(x_i/4)^2}\right| \leq \frac{M_6}{6!} \left(\sum_{i=0}^{4} |\lambda_i| + \frac{2}{7}\right) = \frac{16M_6}{7 \times 720}$$

Une étude rapide de la fonction $x \mapsto e^{(x/4)^2}$ donne

$$f^{(6)}(x) = \left(\frac{x^6}{262144} + \frac{15x^4}{32768} + \frac{45x^2}{4096} + \frac{15}{512}\right) e^{\frac{x^2}{16}}$$

Pour calculer le maximum il suffit de se placer sur $[0,1]$ par parité . Sur cette intervalle on a une somme et un produit de fonctions croissantes positives donc une fonction croissante .

$M_6 r f^{(6)}(1) = \frac{10681 e^{1/16}}{262144} \approx 0.043$, soit une incertitude de l'ordre de $2\ 10^{-4}$.

DEUXIEME PARTIE

6a) L'application $P \to |L(P)|$ est linéaire en dimension finie donc continue. La boule unité fermée $B'(0,1)$ d'un evn de dimension finie étant compacte, $\sup_{P\in B}|L(P)|$ existe et est atteint.

Supposons que le sup soit atteint en Q tel que $N(Q)<1$. Posons $Q_1 = \frac{Q}{N(Q)}$. Alors $N(Q_1)=1$ et :

$$|L(Q_1)| = \frac{|L(Q)|}{N(Q)} = \frac{\mathcal{N}(L)}{N(Q)} > \mathcal{N}(L)$$

Absurde

6b) Pour tout $P \in E$: $\frac{|L(P)|}{N(P)} \leq K$. Par définition du sup, $\mathcal{N}(L) \leq K$. S'il existe Q tel que $N(Q)=1$ et $|L(Q)| = K$, alors le sup est atteint et $\mathcal{N}(L) = K$.

7. Si $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, alors :

$$N_\infty(P) \leq N_2(P)) \leq \sqrt{n+1}N_\infty(P)$$

On ne peut obtenir mieux. Pour $P(x) = x^p$, on a égalité dans la première inégalité, et pour $P(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p$, on a égalité dans la seconde inégalité.

8a) Posons $Q(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$. Alors :

$$|L(Q)| = \left|2\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{a_{2p}}{2p+1}\right| \leq \left(2\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{1}{2p+1}\right) N_\infty(Q)$$

Ainsi $\mathcal{N}_\infty(L) \leq 2\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{1}{2p+1}$. On a égalité avec $Q_\infty(x) = \sum_{p=0}^{n} x^p$. (ou $\sum_{p=0}^{E(n/2)} x^p$)

8b) De même, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas du préliminaire

$$|L(Q)| = \left|2\sum_{p=0}^{E(n/2)} a_{2p+1}\frac{1}{2p+1}\right| \leq 2\left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\right)^{1/2} N_2(Q)$$

Ainsi $\mathcal{N}_2(L) \leq 2\left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\right)^{1/2}$. On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si $a_{2p} = \frac{\lambda}{2p+1}$. Il reste à choisir λ de façon à ce que $\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{|\lambda|^2}{(2p+1)^2} = 1$ soit $\lambda = \left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\right)^{-1/2}$ et le polynôme $Q_2(x) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} a_{2p}x^{2p}$ convient .

TROISIEME PARTIE

attention :l'espace vectoriel n'est plus de dimension finie .

9a) Il suffit de prendre $P_k(x) = \sum_{p=0}^{k} x^p$. On a $N_\infty(P_k) = 1$ et $|L(P_k)| = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{2}{2p+1} \longrightarrow_{n\to\infty} \infty$. car $\sum \frac{1}{2p+1}$

9b) L'application L n'est pas continue :On a trouvé une suite de polynômes (P_k) sur la sphère unité tels que $\lim_{k\to+\infty} L(P_k) = \infty$.On peut considérer la suite $R_k = \frac{P_k}{|L(P_k)|}$ la suite R_k tend vers 0 alors que $L(R_k)$ ne tend pas vers $L(0) = 0$

10a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, si $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$:

$|L(P)| = 2\left|\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{a_{2p}}{2p+1}\right|$

$\leq 2\left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} a_{2p}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\right)^{1/2}$

$\leq N_2(P)\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(on utilise $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$). Ainsi $|||L|||$ existe et $|||L||| \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

10b)Montrons que $|||L||| = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Pour tout $n \in N^*$, on choisit $P_n(x) = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{\lambda_n x^{2p}}{2p+1}$ tel que $N_2(P_n) = 1$. On a alors égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et :

$$|L(P_n)| = 2\left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} \left(\frac{1}{2p+1}\right)^2\right)^{1/2} \longrightarrow_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Supposons qu'il existe $Q(x) = \sum_{p=0}^{q} a_p x^p$ polynôme tel que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$. On a alors :

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = |L(Q)| \leq 2\left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} a_{2p}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{1/2} \leq N_2(Q)\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

On a donc égalité dans toutes ces inégalités. Donc $a_{2p} = \frac{\lambda}{2p+1}$ et

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = 2\left(\sum_{p=0}^{E(n/2)} \frac{1}{(2p+1)^2}\right)^{1/2}$$

ce qui est impossible puisque v_n est strictement croissante donc $\forall n \;\; v_{E(n/2)} \neq \frac{\pi^2}{8}$