CONCOURS ESIGETEL - SESSION MAI/JUIN 2000

Série MP

MATHEMATIQUES 1
ANALYSE

DUREE 4 HEURES
COEFFICIENT 5

Nombre de pages : 3

Rappels et notations :

- si x est un nombre réel, $E(x)$ désigne sa partie entière.
- $C_m^0([a,b],\mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel complexe des fonctions définies, continues par morceaux sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.
- $C^1([a,b],\mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel complexe des fonctions définies, de classe C^1 sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.
- Pour tout réel $x \in [0,\pi/2]$, $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$.
- Pour tout réel x, $|\sin x| \leqslant |x|$.
- Pour tout réel $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

PARTIE I :

1 a) Soient $t \in]0,2\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer la relation suivante :

$$\frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos(pt) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

b) En déduire, pour $x \in]0,2\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, une expression de $\dfrac{x-\pi}{2} + \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{\sin(px)}{p}$ sous la forme d'une intégrale.

2 Soit $f \in C^1([a,b],\mathbf{C})$. Démontrer que la suite $\left(\int_a^b f(t)e^{int}dt\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers zéro.

3 Déduire de ce qui précède que pour tout réel $x \in]0,2\pi[$, la série de terme général $\dfrac{\sin(px)}{p}$ converge et donner la valeur de $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(px)}{p}$.

PARTIE II :

Dans cette partie $(\beta_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est une suite réelle strictement positive, décroissante et de limite nulle. On considère, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les fonctions A_n, f_n, D_n définies sur $[0,2\pi]$ par :

$$D_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx, \quad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \beta_{k+1}) D_k(x), \quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin kx,$$

1. a) Vérifier que l'on a, pour tout $x \in [0,2\pi]$:

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right) D_n(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) \quad \text{et} \quad f_n(x) = A_n(x) + \beta_{n+1} D_n(x)$$

b) Etablir les inégalités suivantes (avec $n > p \geqslant 1$ et toujours $x \in [0,2\pi]$) :

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)|A_p(x)| \leqslant \beta_1 - \beta_{p+1},$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)|A_n(x) - A_p(x)| \leqslant \beta_{p+1} - \beta_{n+1}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)|f_n(x) - f_p(x)| \leqslant 2\beta_{p+1}$$

2. En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge simplement sur $[0,2\pi]$ vers une application f. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, (avec $\alpha \in]0,\pi[$). Que peut-on alors dire de la fonction f?

Partie III :

Dans cette partie on considère la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie sur $[0,2\pi]$ par :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$$

1. Soit S la limite simple de $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sur $[0,2\pi]$. S est-elle continue ?, continue par morceaux ?

2 a) Soient $x \in]0,\pi[$ et $p = E(\frac{\pi}{x})$. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{p} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \pi$.

b) En utilisant **II 1b)**, montrer que pour $x \in]0,\pi[$ et $n > p$: $\left|\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant 2$.

c) Conclure que pour tout $x \in]0,\pi[$, $|S_n(x)| \leqslant M = \pi + 2$. Expliquer pourquoi cette dernière inégalité est vraie pour tout réel x.

3 Pour toute fonction $f \in C^0_m([0,2\pi], \mathbf{C})$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt dt$.

Déduire des précédentes questions que la série de terme général $\frac{b_k(f)}{k}$ est convergente et que sa somme vérifie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k(f)}{k} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\pi - t) f(t) dt$$

(On précisera le théorème utilisé)

4. Applications :

a) En choisissant $f(t) = t$, calculer $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

b) On choisit ici $f(t) = \exp(ixt)$ où x est un réel qui n'est pas un entier relatif. Montrer que l'on obtient le développement suivant :

$$\pi \operatorname{cotan}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

c) Trouver, pour $x \in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Z}$, une relation entre $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2k+1)^2 - x^2}$, $\operatorname{cotan}(\pi x)$ et $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Partie IV :

1 Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des réels x pour lesquels la fonction $t \mapsto \frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh}(t)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. (On pourra d'abord considérer le cas où x est strictement positif.)

2 a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$\frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\operatorname{sh}(xt).e^{-(2k+1)t}$$

b) Soient $x \in \mathcal{D}$ et $k \in \mathbf{N}$. Etudier l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$ de la fonction $u_k : t \mapsto 2\operatorname{sh}(xt).e^{-(2k+1)t}$.

c) Montrer (en justifiant avec précision) que pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh}(t)} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2k+1)^2 - x^2}$$

3 En déduire la relation suivante :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(xt)}{\operatorname{sh}(t)} dt = \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

PARTIE V :

1 a) Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que la fonction $\varphi_m :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$, $t \mapsto \frac{t^m}{\mathrm{sh}(t)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b) Justifier l'égalité suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^m e^{-(2p+1)t} dt$$

c) En déduire que l'on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^m}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2.m! \left(1 - 2^{-m-1}\right) . \zeta(m+1)$$

Dans la suite de cette partie, les notations sont celles de la PARTIE IV .

2 Soit $x \in \mathcal{D}$. Vérifier que pour tout entier naturel p, la fonction $v_p : t \mapsto \frac{t^{2p+1} x^{2p+1}}{\mathrm{sh}(t)(2p+1)!}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et expliciter la valeur de son intégrale en fonction de $\zeta(2p+2)$.

3 En déduire que pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(xt)}{\mathrm{sh}(t)} dt = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \zeta(2p+2) . \left(1 - 2^{-2p-2}\right) x^{2p+1}$$

4 a) Conclure que la fonction tan est développable en série entière sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et préciser les coefficients de ce développement.

b) Comment pourrait-on alors déterminer les valeurs de $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$?