

12JB



Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 3 MP

durée 4 heures

## Problème

On désigne par  $E_0$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  où  $a$  et  $b$  sont donnés avec  $a < b$ , muni de la norme :

$$\|f\| = \sup |f| = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|.$$

On désigne par  $E_1$  le sous-espace de  $E_0$  des applications de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $f \in E_0$  on désigne par  $L(f)$  la primitive de  $f$  qui vérifie  $\int_a^b L(f)(t) dt = 0$ .

Pour tout entier non nul  $n$  on pose  $L^n = L \circ L^{n-1}$  où  $L^0 = \text{id}$  (application identique).

On désigne par  $(P_n)$  la suite de polynômes définis par  $P_0 = 1$  et  $P_n = L^n(P_0)$  où l'on désigne par le même symbole le polynôme et la restriction de sa fonction polynomiale associée à  $[a, b]$ .

## Partie I

1°. (a) Montrer que  $L$  est bien défini et constitue un endomorphisme de  $E_0$ .

(b) Déterminer son noyau  $\text{Ker } L$ .

(c) Montrer que l'image de  $L$  est incluse dans  $E_1$ . La restriction à  $E_1$  de cet endomorphisme  $L$  définit-elle un automorphisme de  $E_1$  (justifier avec précision la réponse) ?

2°. Soit  $f \in E_0$ .

(a) Démontrer l'égalité  $L(f)(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left( \int_x^t f(u) du \right) dx$  pour tout  $t$  dans  $[a, b]$ .

(b) Démontrer l'existence de deux réels  $x_i$  et  $x_s$  dans  $[a, b]$  tels que, pour tout  $t$  dans  $[a, b]$  :

$$L(f)(x_i) \leq L(f)(t) \leq L(f)(x_s).$$

(c) Calculer la borne supérieure  $\alpha$  de  $\int_a^b |x-t| dt$  lorsque  $x$  décrit  $[a, b]$ . En déduire que  $\|L(f)\| \leq \frac{b-a}{2} \|f\|$ . L'endomorphisme  $L$  est-il continu (justifier la réponse) ?

(d) Calculer  $\|L(P_0)\|$  ainsi que  $\|L\| = \sup \|L(f)\|$  lorsque  $f$  décrit la boule unité fermée de  $E_0$  définie par  $\|f\| \leq 1$ .

## Partie II

On désigne par  $F_1$  le sous-ensemble de  $E_0$  défini par les fonctions  $f$  telles que  $f(a+b-t) = \varepsilon f(t)$  pour tout  $t$  dans  $[a, b]$  avec  $\varepsilon = -1$ , et  $F_2$  le sous-ensemble analogue avec  $\varepsilon = +1$ .

On désigne par  $f_1$  l'application  $t \mapsto \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^3$  et par  $f_2$  l'application  $t \mapsto (t-a)(t-b)$  où  $t$  décrit  $[a, b]$ .

1°. (a) Les ensembles  $F_1$  et  $F_2$  sont-ils vides ? réduits à  $\{0\}$  ?

(b) Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels. Les comparer avec leurs images par  $L$ .

2°. Soit  $f$  un élément de  $E_0$  et  $g$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par  $g(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(a+b-t)]$ .

(a) Vérifier que  $g$  appartient à  $F_2$ .

(b) Démontrer la relation  $E_0 = F_1 \oplus F_2$ .

(c) Démontrer la relation  $L^n(f)(a) = L^n(f)(b)$  pour tout entier  $n \geq 2$ .

3°. Soit  $f$  un élément de  $F_2$ .

(a) Démontrer les relations :

$$L^{2n-1}(f)\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0, \quad L^{2n+1}(f)(a) = L^{2n+1}(f)(b) = 0$$

$$\text{et} \quad \int_a^{\frac{a+b}{2}} L^{2n}(f)(t) dt = 0$$

lorsque  $n$  décrit  $N^*$ .

(b) On suppose désormais que  $f(t) > 0$  pour tout  $t$  dans  $[a, b]$ . Étudier les variations de  $L(f)$ ,  $L^2(f)$ ,  $L^3(f)$  et  $L^4(f)$  puis, plus généralement,  $L^n(f)$  lorsque  $n$  décrit  $N^*$ .

(c) Calculer le cardinal de  $\Omega_n = \{t \in [a, b] \mid L^n(f)(t) = 0\}$  lorsque  $n$  décrit  $N^*$ .

(d) Déterminer le signe de  $L^{2n}(f)(a)$  lorsque  $n$  décrit  $N^*$ .

### Partie III

1°. (a) Exprimer  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  en fonction de la variable  $t - a$ .

(b) Établir l'égalité  $P_n(X + b - a) - P_n(X) = (b - a) \frac{(X - a)^{n-1}}{(n - 1)!}$  lorsque  $n$  décrit  $N^*$ .

(c) En déduire la valeur de la somme  $S_2 = \sum_{k=1}^n k^2$ .

2°. Soit  $\mathcal{P} = \mathbb{R}[X]$ . On définit sur  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  l'application :

$$\varphi : (P, Q) \mapsto \varphi(P, Q) = \frac{1}{b - a} \int_a^b P(t) Q(t) dt.$$

(a) Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.

(b) Montrer que, si  $m$  et  $n$  sont deux entiers vérifiant les relations  $m \geq n > 0$ , l'on dispose des égalités :

$$\varphi(P_n, P_m) = (-1)^{n+1} P_{n+m}(a) \quad \text{et} \quad \varphi(P_n, P_0) = 0.$$

(c) Montrer que  $P_n(a) = 0$  si, et seulement si,  $n$  est impair et différent de 1.

3°. On désigne respectivement par  $FP_1$  et  $FP_2$  les sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{P}$  engendrés par les polynômes  $P_n$  d'indices pairs et impairs.

(a) Démontrer la relation  $\mathcal{P} = FP_1 \oplus FP_2$ .

(b) Démontrer que cette somme directe est orthogonale pour le produit scalaire  $\varphi$ .

4°. On désigne par  $\gamma_n$  le nombre  $\frac{n!}{(b - a)^n} P_n(a)$  (ainsi  $\gamma_0 = 1$ ).

(a) Démontrer la relation  $\gamma_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \gamma_k$  pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 et en déduire que  $\gamma_n$  est indépendant de  $a$  et de  $b$ .

(b) Calculer  $\gamma_n$  pour  $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ .

(c) Déterminer une base  $\varphi$ -orthogonale du sous-espace  $G$  de  $FP_2$  engendré par la famille  $(P_0, P_2, P_4, P_6)$ .