Spé PC2 devoir pour le Vendredi 17 Janvier

Le sujet comporte 3 pages

Aucun résultat ne sera pris en compte s'il n'est accompagné des calculs intermédiaires et/ou de l'énoncé précis des théorèmes utilisés .Les candidats peuvent admettre un résultat à condition de le préciser explicitement.

Les copies illisibles , mal présentées ou comportant trop de fautes d'orthographe seront pénalisées

Dans tout le problème on considère une fonction $g \in C^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ intégrable sur $[1, +\infty[$

Le but du problème est l'étude de quelques propriétés des solutions de l'équation différentielle : (Eq)

$$y\,'' + (1+g)y = 0$$

Une fonction y sera dite solution de (Eq) si et seulement si

$$y \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ , } y\,''(x) + (1+g(x))y(x) = 0$$

On notera E l'ensemble des solutions de l'équation (Eq)

$$E = \{y \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}) \text{ ,} \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ , } y\,''(x) + (1+g(x))y(x) = 0\}$$

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ on dira que x_0 est une racine de f si et seulement si $f(x_0) = 0$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés des solutions de (Eq) et en particulier de montrer que toute solution de (Eq) admet une infinité de racines .

PREMIERE PARTIE

étude d'exemples

1. Dans cette question g est la fonction nulle.

   a)Déterminer dans ce cas l'ensemble des solutions de (Eq) .

   b)Montrer que toute solution de (Eq) admet une infinité de racines sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Dans cette question on suppose que g est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ , } g(x) = -\frac{2}{x^2}$$

   a)On se donne la fonction f_1 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ , } f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x} - \cos(x)$$

   - Montrer que f_1 est dans E .
   - Montrer que f_1 se prolonge par continuité en 0 .
   - (question 5/2) La fonction ainsi prolongée est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$?
   - pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ quel est le signe de $f_1(n\pi)$.
   - Montrer que f_1 admet une infinité de racines sur $\mathbb{R}^{+*}$.

   b)On se donne un réel α et la fonction f_2 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ , } f_2(x) = \frac{\cos(x)}{x} + \alpha \sin(x)$$

   Déterminer α pour que f_2 soit dans E .

   c)Montrer que toute solution de (Eq) admet une infinité de racines sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. (question réservée au 5/2)

   Dans cette question on suppose que g est la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ g(x) = -\frac{6}{x^2}$$

   a)Montrer que f est élément de E si et seulement si

$$f \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R}) \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ x^2 f''(x) + (x^2 - 6) f(x) = 0$$

   b)On cherche les fonctions f développables en séries entières et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 f''(x) + (x^2 - 6) f(x) = 0$$

   On pose donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

   - Exprimer a_{n-2} en fonction de a_n
   - Calculer a_n si n est pair puis si n est impair .
   - Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue .

DEUXIEME PARTIE

une équation fonctionnelle vérifiée par les solutions

On reprend pour toute la suite une fonction g quelconque de classe C^0 sur $\mathbb{R}^{+*}$, intégrable sur $[1, +\infty[$.

On se donne un réel a strictement positif .

Soit y un élément de E . On introduit deux fonctions λ et μ éléments de $C^2(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \begin{cases} y(x) = \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x) \\ 0 = \lambda'(x)\cos(x) + \mu'(x)\sin(x) \end{cases}$$

1. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ \lambda'(x)\sin(x) - \mu'(x)\cos(x) = g(x)y(x)$$

2. Calculer λ' et μ' en fonction de $g, y, \sin$ et $\cos$.

   En déduire qu'il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - \sin(x)\int_a^x g(u)y(u)\cos(u)du + \cos(x)\int_a^x g(u)y(u)\sin(u)du$$

3. Montrer que l'expression précédente est équivalente à :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \ , \ y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + \int_a^x g(u)y(u)\sin(u - x)du$$

4. Réciproquement montrer que toute fonction $y \in C^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ vérifiant l'équation précédente est dans E .

TROISIEME PARTIE

étude des solutions

On considère toujours une solution y de (Eq) et on admettra si besoin est qu'il existe deux constantes réelles C_1 et C_2 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ , } y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) + \int_a^x g(u)y(u)\sin(u-x)du$$

1. Montrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que :

$$\int_a^{+\infty} |g(t)| \, dt \leq 1/2$$

   Dans toute la suite du problème a désignera un tel réel

2. Soit $b > a$ On note $M_b = \max(|y(t)|, a \leq t \leq b)$.

   a)Justifier l'existence de M_b .

   b)Montrer :

$$\left| \int_a^b g(u)y(u)\sin(u-x)du \right| \leq \frac{1}{2} M_b$$

   En déduire que $M_b \leq 2\left(|C_1| + |C_2|\right)$

   c)En déduire que y est bornée sur $[a, +\infty[$. On note $M = \sup(|y(t)|, t \geq a)$

   - peut-on dire que y est bornée sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$? justifier la réponse .
   - peut-on dire que y est bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$? justifier la réponse .

3. Montrer que pour tout $x > 0$ la fonction g_x :

$$\forall u \in [a, +\infty[\text{ , } g_x(u) = g(u)y(u)\sin(u-x)$$

   est intégrable sur $[a, +\infty[$

4. Montrer qu'il existe deux constantes C_3 et C_4 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \text{ , } y(x) = C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x) - \int_x^{+\infty} g(u)y(u)\sin(u-x)du$$

5. Montrer :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(y(x) - C_3 \cos(x) - C_4 \sin(x)\right) = 0$$

6. Montrer que pour $(C_3, C_4) \neq (0,0)$, y admet une infinité de racines sur $\mathbb{R}^{+*}$.

7. Montrer que si $C_3 = C_4 = 0$ alors y est la fonction nulle .