

SESSION DE 1999

Filière PC

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices est autorisé.

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies.

En particulier, les candidats sont priés d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés.

NOTATIONS

On désigne par \mathbb{R} l'ensemble des réels et par (E) l'équation:

$$2y \phi(x,y) + (1-x^2) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - (1-y^2) \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = 0$$

On dira que ϕ est une solution de (E) sur un ouvert Δ de \mathbb{R}^2 si et seulement si :

- i) ϕ est une fonction de classe C^1 sur l'ouvert Δ de \mathbb{R}^2 .
- ii) L'équation (E) est vérifiée pour tout couple (x,y) de Δ .

PRELIMINAIRES

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{1-y^2} \ln \left(\frac{x+y}{1+xy} \right)$$

On note D l'ensemble des couples de réels (x,y) pour lesquels cette expression a un sens.

Représenter l'ensemble D dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) puis établir que D est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

2. Prouver que f est de classe C^1 sur D.

Tournez la page SVP

3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(1-y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2yf(x, y)$ pour (x, y) dans D puis démontrer que f est une solution de (E) sur D .

4. Pour $x > 0$ et $y \in]0, 1[$ comparer $f(x, y)$ et $f(\frac{1}{x}, y)$.

5. Etablir l'inégalité suivante:

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \forall y \in]0, 1[\quad \left| \ln\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \right| \leq |\ln y|$$

6. Prouver que $y \rightarrow f(0, y)$ est intégrable sur $]0, 1[$. En déduire que pour tout $x \geq 0$ la fonction $y \rightarrow f(x, y)$ est intégrable sur $]0, 1[$.

On définit alors sur $[0, +\infty[$ la fonction F par :

$$F(x) = \int_{]0, 1[} f(x, y) dy$$

PARTIE I : ETUDE DE F

7. a) Montrer que F est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Pour $x > 0$ comparer $F(x)$ et $F(\frac{1}{x})$. Que vaut $F(1)$?

c) Exprimer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ à l'aide de $F(0)$.

8. a) Calculer $\sum_0^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ en développant en série de Fourier la fonction φ , 2π -périodique

paire, définie par : $\forall t \in [0, \pi] \quad \varphi(t) = t$.

b) En développant $\frac{1}{1-y^2}$ en série entière, pour $y \in]-1, 1[$, déterminer $F(0)$.

9. a) Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer $F'(x)$ pour $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Comparer le résultat obtenu et $f(0, x)$.

c) En déduire $F'(1)$. Déterminer la demi-tangente à droite à la courbe représentative de F pour $x = 0$.

10. A l'aide des résultats précédents, construire la courbe représentative de F .

PARTIE II :RESOLUTION DE (E)

11. Soit Ω et Ω' les ouverts de \mathbb{R}^2 suivants:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y < x\}$$

$$\Omega' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 > 4y\}$$

On considère l'application Ψ de Ω dans \mathbb{R}^2 :

$$\Psi: (x, y) \rightarrow (x + y, xy)$$

- a) Etablir que Ψ est une bijection de classe C^1 de Ω sur Ω' .
- b) Calculer le jacobien de Ψ et en déduire que Ψ est un difféomorphisme de classe C^1 de Ω sur Ω' .

12. Soit g une fonction de classe C^1 sur Ω .

- a) Montrer qu'il existe une application $h: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(u, v) \mapsto h(u, v)$
de classe C^1 sur Ω' telle que:
 $\forall (x, y) \in \Omega \quad g(x, y) = h(x + y, xy)$

b) Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

- i) $\forall (x, y) \in \Omega \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$
- ii) $\forall (u, v) \in \Omega' \quad \frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = 0$

13. Soit H une solution de (E) sur $\Omega_1 = \{(x, y) \in]-1, 1[^2 / y < x\}$ et G définie sur Ω par

$$G(u, v) = (1 - th^2 v)H(thu, thv)$$

où th désigne la fonction tangente hyperbolique.

- a) Calculer $\frac{\partial G}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial G}{\partial v}(u, v)$ à l'aide des dérivées partielles de H .

b) Déduire de la question 12) qu'il existe une fonction Φ de classe C^1 sur $]-1, 1[$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \Omega_1 \quad H(x, y) = \frac{1}{1 - y^2} \Phi\left(\frac{x + y}{1 + xy}\right)$$

[Indications : On pourra transformer cette égalité en posant $x = th X$ et $y = th Y$ sachant que la fonction th est un difféomorphisme de \mathbb{R} sur l'intervalle $]-1, 1[$ et que $th(u + v) = \frac{thu + thv}{1 + thu.thv}$]

14. Donner l'ensemble des solutions de (E) sur Ω_1 .