Concours commun polytechnique
concours 2002 série MP Math 2

I. Étude d'un exemple

1. Si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix}=(a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-(ad+bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où :

$$\boxed{A^2-tr(A)A+\det(A)I_2=\mu 0}$$

2. D'après le critère de sous algèbre rappelé dans le sujet :

- Par définition, $\mathbb{A}$ est le sous-espace vectoriel engendré par I_2 et A donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
- A n'est pas une matrice scalaire (donc n'est pas colinéaire à I_2) donc (I_2,A) est une famille libre et par conséquent c'est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$
- $\mathbb{A}$ contient I_2.
- Enfin, $\mathbb{A}$ est stable pour le produit car si $(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$,

$$(aI_2+bA)(\alpha I_2+\beta A)=(a\alpha-b\beta\det(A))I_2+(a\beta+\alpha b+b\beta tr(A))A\in\mathbb{A}$$

$$\boxed{\mathbb{A} \text{ est une sous algèbre de dimension 2 de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

3. Si $B=aI_2+bA$ le calcul précédent donne $B^2=(a^2-b^2\det A)I_2+(2ab+b^2trA)A$. On veut $B^2=-I_2$. On a donc deux décompositions de B^2 dans la base (A,I_2) . L'existence de B^2 équivaut donc au système :

$$\begin{cases} a^2-b^2\det A=-1 \\ 2ab+b^2trA=0 \end{cases}$$

- Si $b=0$ on a $a^2=-1$ équation impossible dans les réels . D'autre part si $b=0$ on a $tr(A)^2-4\det(A)=(a+d)^2-4ad=(a-d)^2\geq 0$, contradictoire avec $tr(A)^2<4\det(A)$
- Donc on peut supposer $b\neq 0$ et le système équivaut à

$$\begin{cases} a^2-b^2\det A=-1 \\ a=-\frac{b}{2}trA \end{cases}$$

ou encore à

$$\begin{cases} b^2\left(\frac{tr(A)^2-4\det(A)}{4}\right)=-1 \\ a=-\frac{b}{2}trA \end{cases}$$

- Si $tr(A)\geq 4\det(A)$ la première équation est impossible
- Si $tr(A)<4\det(A)$ il existe deux matrices de $\mathbb{A}$ dont le carré vaut $-I_2$:

$$\boxed{B=\frac{\pm 2}{\sqrt{4\det A-(trA)^2}}\left(\left(-\frac{trA}{2}\right)I_2+A\right)}$$

$$\boxed{\left(\exists B\in\mathbb{A}, B^2=-I_2\right)\Leftrightarrow\left(tr(A)^2<4\det(A)\right)}$$

- Remarque 5/2 : si B existe le carré des valeurs propres de B vaut -1 .Donc B n'a pas de valeur propre réel donc A n'a pas de valeur propre réel . Le discriminant du polynôme caractéristique est strictement négatif ce qui donne aussi $tr(A)^2<4\det(A)$. La réciproque se fait de toute façon par le calcul.

4. On suppose qu'il existe $B\in\mathbb{A}$ telle que $B^2=-I_2$.

- B n'est pas une matrice scalaire :car si $\exists\lambda\in\mathbb{R}$, $B=\lambda I_2$ alors $B^2=\lambda^2 I_2\neq -I_2$
- donc (I_2,B) est une famille libre de $\mathbb{A}$.
- On a alors deux vecteurs libres en dimension 2 . C'est une base de $\mathbb{A}$.

Définissons alors f comme l'unique application linéaire entre les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$ telle que $f(I_2)=1$ et $f(B)=i$. (f existe et est unique puisque f est défini par l'image d'une base)

- f est un isomorphisme d'espaces vectoriels car elle envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{C}$.
- $f(I_2)=1$.

- $f(MM') = f(M)f(M')$: si $M = xI_2 + yB$ et $M' = x'I_2 + y'B$

$$MM' = xx'I_2 + (xy' + x'y)B + yy'B^2 = (xx' - yy')I_2 + (xy' + x'y)B$$

  donc

$$f(MM') = (xx' - yy')f(I_2) + (xy' + x'y)f(B) = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

  et

$$f(M)f(M') = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme d'algèbres entre } \mathbb{A} \text{ et } \mathbb{C}.}$$

5. D'après le calcul fait en question 3. et A étant non scalaire, si $M = aI_2 + bA$, la condition $M^2 = 0$ équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 \det A = 0 \\ 2ab + b^2 trA = 0 \end{array} \right.$$

- Si $b = 0$ alors la première équation donne $a = 0$
- Si $b \neq 0$ la seconde équation donne $a = -\frac{b}{2}trA$ ce qui reporté dans la première donne $0 = 0$ et b est quelconque.

$$\boxed{M = b\left(\left(-\frac{trA}{2}\right)I_2 + A\right),\ b \in \mathbb{R}}$$

Soit alors une matrice M non nulle vérifiant $M^2 = 0$. une telle matrice est non inversible , (car sinon $M^2 = 0 \Rightarrow M = M^2M^{-1} = 0$)

$$\boxed{\mathbb{A} \text{ n'est pas un corps}}$$

6. Par hypothèse, B est une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

- A n'est pas non plus scalaire (sinon $B = P^{-1}\lambda I_2 P = \lambda P^{-1}I_2P = \lambda I_2$)
- (I_2, A) est une base de $\mathbb{A}$.

Définissons alors g comme l'unique application linéaire de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ telle que $g(I_2) = I_2$ et $g(A) = B$.

- L'application g est alors bijective car est linéaire et envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{B}$.
- $\forall M \in \mathbb{A}$, $g(M) = P^{-1}MP$: si $M = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$, $g(M) = aI_2 + bB = aI_2 + bP^{-1}AP = P^{-1}(aI_2 + bA)P = P^{-1}MP$
- $\forall (M; M') \in \mathbb{A}^2$: $g(M)g(M') = g(MM')$, :

$$g(M)g(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = g(MM')$$

  ce qui achève de montrer que g est un isomorphisme d'algèbres.

$$\boxed{\mathbb{A} \text{ et } \mathbb{B} \text{ sont deux algèbres isomorphes}}$$

7.

a) *Rédaction 5/2 :*

Si $(trA)^2 > 4\det A$ le discriminant du polynôme caractéristique de A est strictement positif donc χ_A possède deux racines réelles distinctes donc A possède deux valeurs propres réelles distinctes ce qui implique sa diagonalisabilité vu que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) *Rédaction 3/2:*

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ ayant dans la base canonique (e_1, e_2) la matrice A.

On cherche une base (c_1, c_2) dans la quelle la matrice de ϕ soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Si on pose $c = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $f(c) = \lambda c$ équivaut au système $\left\{ \begin{array}{l} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0 \end{array} \right.$.

Le système est homogène il existe une solution non nulle si et seulement le déterminant est non nul .Soit $\lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0$.

Par hypothèse le discriminant est non nul donc il existe deux solutions réelles distinctes notées λ_1 et λ_2 .

Soit alors c_1 non nul tel que $\phi(c_1) = \lambda_1 c_1$ et c_2 non nul tel que $\phi(c_2) = \lambda_2 c_2$. Ces deux vecteurs forment un système libre (donc une base) car

$$\lambda c_1 + \mu c_2 = \overrightarrow{0} \Rightarrow \lambda\lambda_1 c_1 + \mu\lambda_2 c_2 = \overrightarrow{0}$$

On retranche alors la première équation multipliée par λ_1 à la seconde : $\mu(\lambda_2 - \lambda_1) c_2 = \overrightarrow{0}$ donc $\mu = 0 \cdots$

b) Soit D matrice diagonale semblable à A. D'après la question précédente, $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathbb{D} = Vect\{I_2, D\}$.

Or $\mathbb{D}$ est isomorphe à l'ensemble des matrices diagonales:

- toute matrice de $\mathbb{D}$ est diagonale : évident
- si M est diagonale on a $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ donc $M = xI_2 + yD \Leftrightarrow \begin{cases} a = x +_1 y \\ b = x + \lambda_2 y \end{cases}$ système de Cramer car $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Donc (a,b) existe et $M \in \mathbb{D}$.

$\mathbb{D}$ n'est pas un corps car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle et non inversible de $\mathbb{D}$. donc par isomorphisme

$\boxed{\mathbb{A} \text{ n'est pas un corps}}$

II. Quelques résultats généraux

1. On vérifie que

$$\begin{aligned}
\phi_a(\lambda x + \lambda y) &= a.(\lambda x + \mu y) \\
&= a.(\lambda x) + a.(\mu y) \text{ par distributivité} \\
&= \lambda(a.x) + \lambda(a.y) \text{ par la propriété supplémentaire d'une algèbre} \\
&= \lambda\phi_a(x) + \mu\phi_a(y)
\end{aligned}$$

- On vérifie que $\phi_{\lambda a + \mu b} = \lambda\phi_a + \mu\phi_b$:

$$\begin{aligned}
\phi_{\lambda a + \mu b}(x) &= (\lambda a + \mu b).x \\
& (\lambda a).x + (\mu b).x \text{ par distributivité} \\
&= (\lambda a).x + (\mu b).x \\
&= \lambda\phi_a(x) + \mu\phi_b(x)
\end{aligned}$$

- On vérifie : $\phi_{ab} = \phi_a \circ \phi_b$.

$$\begin{aligned}
\phi_{a.b}(x) &= (a.b).x = a.(b.x) \text{ par associativité} \\
&= \phi_a(\phi_b(x)) = \phi_a \circ \phi_b(x)
\end{aligned}$$

- $\phi_{1_{\mathbb{D}}}$ est l'application identité de $\mathbb{D}$.

- enfin $a- > \phi_a$ est injective : si $\phi_a = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{D})}$ alors pour tout x de $\mathbb{D}$, $a.x = 0_{\mathbb{D}}$. On peut prendre $x = 1_{\mathbb{D}}$ on en déduit $a = 0_{\mathbb{D}}$

On en déduit que l'application $\Phi : a- > \phi_a$ est un morphisme d'algèbres injectif de $\mathbb{D}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{D})$

Par traduction matricielle on en déduit que Ψ est un morphisme d'algèbres injectif de $\mathbb{D}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\mathbb{D}$ est donc isomorphe à son image $\Psi(\mathbb{D})$

$\boxed{\mathbb{D} \text{ est isomorphe à une sous algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

2. Si $\mathbb{D} = \mathbb{C}$ et $z = a + ib$, $\phi_z(1) = z = a + ib$ et $\phi_z(i) = (a + ib)i = -b + ia$ donc si $\mathcal{B} = (1, i)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

3. **a)**Soit $A \in \mathbb{A} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui possède une valeur propre réelle λ et n'est pas une matrice scalaire. Alors $A - \lambda I_n$ appartient à $\mathbb{A}$ (car $\mathbb{A}$ est stable par combinaisons linéaires et contient A et I_n), $A - \lambda I_n$ est non inversible (car par définition il existe un vecteur colonne V tel que $(A - I_n)V = (0)$) et n'est pas la matrice nulle (car A n'est pas scalaire) ce qui prouve que $\boxed{\mathbb{A} \text{ n'est pas un corps}}$.

   b)Toute matrice trigonalisable (*a fortiori* diagonalisable) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$ donc possède au moins une valeur propre réelle. Par suite, d'après (a), si $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire trigonalisable, $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

   c)On suppose $\mathbb{A}$ intègre

   Soit $A \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

- $\Phi_A\ : X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathbb{A}$ d'après 1.
- ϕ_A est injectif: comme $\mathbb{A}$ est intègre et A non nulle, $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ et donc $Ker\,\phi_A = \{0\}$
- ϕ_A est surjective comme endomorphisme injectif d'un espace vectoriel de dimension finie
- il existe $B \in \mathbb{A}$ telle que $\phi_A(B) = I_n$. (l'antécédent par ϕ_A de I_n) . La matrice A possède donc un inverse à droite, donc est inversible d'inverse B appartenant à $\mathbb{A}$.

Tout élément non nul de $\mathbb{A}$ possède donc un inverse dans $\mathbb{A}$

$$\boxed{\mathbb{A} \text{ est un corps}}$$

III. L'algèbre des quaternions

1. Comme $A^2 = -I_n$, on a $(\det A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}^+$ donc $\underline{n \text{ est pair.}}$

2. A titre de préliminaire on peut étblir la table de calcul du produit des 4 matrices génératrices:

$1\backslash 2$	I_n	A	B	AB
I_n	I_n	A	B	AB
A	A	$-I_n$	AB	$-B$
B	B	$-AB$	$-I_n$	A
AB	AB	B	$-A$	$-I_n$

- $\mathbb{H}$ est un sous espace vectoriel engendré par définition
- $\mathbb{H}$ contient I_n par définition
- $\mathbb{H}$ est stable par produit :
  si $M = tI_n + xA + yB + zAB$ et $M' = t'I_n + x'A + y'B + z'AB$ sont deux éléments de $\mathbb{H}$ on a après calcul :

$$MM' = (tt' - xx' - yy' - zz')I_n + (tx + xt' + yz' - zy')A + (ty' - xz' + yt' + zx')B + (tz' + xy' - yx' + zt')AB$$

$$\boxed{\mathbb{H} \text{ est une sous-algèbre de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

3. D'après 2.,
$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$$

4. **a)**Si $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ sont tels que $tI_n + xA + yB + zAB = 0$ alors

$$\boxed{(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n = (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0}$$

donc $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ce qui, vu que t, x, y, z sont réels impose $t = x = y = z = 0$. La famille (I_n, A, B, AB) est donc libre. Comme c'est une famille génératrice par définition c'est une base.

$$\boxed{(I_n, A, B, AB) \text{ est une base de } \mathbb{H}}$$

b)Si M est un élément non nul de $\mathbb{H}$ on a donc $M = tI_n + xA + yB + zAB$ avec $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ donc M est inversible d'inverse $\frac{1}{t^2+x^2+y^2+z^2}(tI_n - xA - yB - zAB)$ appartenant à $\mathbb{H}$ donc

$$\boxed{\mathbb{H} \text{ est un corps}}$$

5. **a)** D'après les règles de calcul des produits de matrices par blocs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = -I_4,\ B^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = -I_4$$

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = 0$$

b) On a ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^tJ & 0 \\ 0 & {}^tJ \end{pmatrix} = -A$ donc A est antisymétrique. De même B et $C = AB$ sont antisymétrique.

Donc si $M = tI_n + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$, ${}^tM = tI_n - xA - yB - zC \in \mathbb{H}$ et d'après 3., $M.{}^tM = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_4$. On en déduit donc que $(\det M)^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^4$. Si $M \neq 0$, on a donc d'après 4.b),

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\det M|}}\,{}^tM$$

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. Soit $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ et $M = tI_n + xA + yB + zC$,. On a alors $M + {}^tM = 2tI_n$.

$$M = -{}^tM \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow M \in Vect\{A, B, C\}$$

Or (A, B, C) est une famille libre car sous-famille de la famille libre (I_4, A, B, C).

$$\boxed{(A, B, C) \text{ est une base de } \mathbb{L}}$$

$\mathbb{L}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{H}$ car, par exemple $A.A = -I_2 \notin \mathbb{L}$ alors que $A \in \mathbb{L}$.

2. Soit $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$ deux éléments de $\mathbb{L}$. Comme (A, B, C) est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on a $(M|N) = xx' + yy' + zz'$. Par ailleurs, d'après III.3.,

$$\begin{aligned} MN + NM &= (-xx' - yy' - zz')I_4 + (yz' - zy')A + (-xz' + zx')B + (xy' - yx')C \\ &\quad +(-x'x - y'y - z'z)I_4 + (y'z - z'y)A + (-x'z + z'x)B + (x'y - y'x)C \\ &= -2(xx' + yy' + zz')I_4 \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4}$$

.

3.

- Si $M \in \mathbb{L}$, $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda = -\|M\|^2 \in \mathbb{R}^-$. (calcul du 2 avec $N = M$)
- Réciproquement, soit $M = tI_4 + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$ telle que $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Alors, d'après III.2.,

$$M^2 = (t^2 - x^2 - y^2 - z^2)I_4 + 2txA + 2tyB + 2tzC$$

donc comme on a une base $\left\{ \begin{array}{l} tx = ty = tz = 0 \\ t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \in \mathbb{R}^- \end{array} \right.$.
Ces conditions imposent $t = 0$ (car sinon $x = y = z = 0$ et alors $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = t^2 > 0$) . Donc $M \in \mathbb{L}$.

$$\boxed{M \in \mathbb{L} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^-, M^2 = \lambda I_n}$$

4. Soit ϕ un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ dans elle-même.

- Si $M \in \mathbb{L}$, on a $M^2 = -\|M\|^2 I_4$ donc $\phi(M)^2 = \phi(M^2) = -\|M\|^2\phi(I_4) = -\|M\|^2 I_4$. On en déduit d'après 3. que $\phi(M) \in \mathbb{L}$.
- De plus $\phi(M)^2 = -\|\phi(M)\|^2 I_4$ et donc $-\|\phi(M)\|^2 = -\|M\|^2$ soit $\|\phi(M)\| = \|M\|$. Donc ϕ transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme.
- L'endomorphisme induit par ϕ sur $\mathbb{L}$ conserve la norme donc c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{L}$.

5. **a)** Si M et N sont deux quaternions purs de même norme colinéaires, on a ou bien $M = N$ ou bien $M = -N$.

- Si $M = N$ la matrice $P = I_4$ vérifie $P \in \mathbb{H}$, $P \neq 0$ et $M = P^{-1}NP$.

- Si $N = -M$ la condition $M = P^{-1}NP$ équivaut à $PM + MP = 0$. D'après la question 2 cela équivaut à $(M|N) = 0$. Il suffit donc de prendre pour P une matrice non nulle appartenant à l'orthogonal de $Vect\{M\}$ dans $\mathbb{L}$: une telle matrice existe bien puisque $(Vect\{M\})^\perp$ est un plan vectoriel de $\mathbb{L}$ et si $P \in (Vect\{M\})^\perp \setminus \{0\}$, $PM + MP = -(P|M)I_4 = 0$.
P étant un élément non nul de $\mathbb{H}$ c'est une matrice inversible ($\mathbb{H}$ est un corps)

b) On suppose que M et N sont deux quaternions purs de même norme, non colinéaires. Alors

$$M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = (-\|M\|^2 I_4)N - M(-\|N\|^2 I_4) = \|M\|^2(M - N)$$

On a donc $M(MN - \|M\|^2 I_4) = (MN - \|M\|^2 I_4)N$. Dans ces conditions, si on pose $P = MN - \|M\|^2 I_4 = MN + M^2$, on a :

- $MP = PN$, $P \in \mathbb{H}$

- $P \neq 0$ car sinon on aurait $M(N+M)=0$ donc $M+N=0$ (M est inversible car élément non nul de $\mathbb{H}$) ce qui est contradictoire avec le fait que la famille (M,N) soit libre.
- Comme P est un élément non nul de $\mathbb{H}$, P est inversible et $M = PNP^{-1}$.

6. Pour la matrice P mise en évidence dans chacun des 3 cas envisagés, on a bien la propriété souhaitée.

- dans le cas où $M=N$, on a choisi $P=I_4$ soit $Q=0$ qui est bien orthogonale à $M=N$
- dans le cas où $M=-N$, on a choisi $P=0I_4+Q$ avec Q orthogonale à M et N.
- dans le cas où M et N sont linéairement indépendantes, on a $P = MN - \|M\|^2 I_4$.

  Si $P=\alpha I_n + Q$ avec $Q \in \mathbb{L}$ alors Q est antisymétrique . Le système $\left\{ \begin{array}{l} P = \alpha I_n + Q \\ {}^tP = \alpha I_n - Q \end{array} \right.$ donne

$$Q = \frac{1}{2}\left(P - {}^t P\right) = \frac{1}{2}\left(MN - {}^t(MN)\right) = \frac{1}{2}(MN - NM) \text{ car } M \text{ et } N \text{ sont antisymétriques.}$$

  On a donc d'après la question 2:

$$(Q|N)\, I_n = \frac{1}{2}(QN+NQ) = \frac{1}{4}\left(MN^2 - NMN + NMN - N^2M\right) = \frac{1}{4}(MN^2 - N^2M)$$

  Or $N^2 = \|N\|^2 I_n$ (toujours la question 2 et donc $(Q|N)=0$ et de même $(Q/M)=0$

$$\boxed{P = \alpha I_n + Q \ ,\ Q \in \mathbb{L}, Q \text{ orthogonale à } M \text{ et } N}$$

On a montré que la matrice P construite à la question précédente se décompose en $\alpha I_n + Q$ avec Q orthogonale. Mais je ne suis pas certain que le résultat soit vrai pour toute matrice de $\mathbb{H}$ vérifiant $M = P^{-1}NP$

7.

- tout d'abord notons que $\forall P \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$, l'application ϕ_P de $\mathbb{H}$ dans lui-même qui à M associe $P^{-1}MP$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$.

  En effet, ϕ_P est bien une application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ puisque $\mathbb{H}$ est un corps, ϕ_P est linéaire par bilinéarité du produit dans $\mathbb{H}$, $\phi_P(I_4) = P^{-1}I_4P = I_4$ et $\phi_P(M)\phi_P(N) = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) = P^{-1}MNP = \phi_P(MN)$ pour tout couple $(M,N)\in\mathbb{H}^2$. Enfin, ϕ_P est bien bijective, de bijection réciproque égale à $\phi_{P^{-1}}$.

- Soit ϕ et ψ deux isomorphisme d'algèbre tels que $\phi(A)=\psi(A)$ et $\phi(B)=\psi(B)$ alors

$$\phi(C) = \phi(A)\phi(B) = \psi(A)\psi(B) = \psi(C) \text{ et } \phi(I_4) = \psi(I_4)$$

  donc $\phi=\psi$ puisque les deux applications linéaires sont égales sur une base.

  Donc en particulier si $\phi(A) = P^{-1}AP$ et $\phi(B) = P^{-1}BP$ alors $\forall M$, $\phi(M) = P^{-1}MP$

- Soit ϕ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ tel que $\phi(A)=A$ et $\phi(B)=B$ .D'après la remarque précédente $\phi(M)=M$ et $\phi = Id$ convient.
- Soit ϕ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ tel que $\phi(A)=A$ et $\phi(B)=-B$

  On recherche donc $P\in\mathbb{H}\setminus\{0\}$ telle que $P^{-1}AP = A$ et $P^{-1}BP = \phi(B) = -B$. D'après les règles de calcul sur la base $P=A$ est solution "évidente"..
- Soit ϕ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ tel que $\phi(A)=A$ et $\phi(B)$ non colinéaire à B

  Alors il existe une matrice $P\in\mathbb{H}$, telle que $\phi(B) = P^{-1}BP$ et $P = \alpha I_4 + Q$ avec Q orthogonal à B et $\phi(B)$ d'après la question précédente.

  Par choix du produit scalaire B est orthogonal à A , donc $\phi(B)$ est orthogonal à $\phi(A)=A$ d'après la question 4.

  dans $\mathbb{L}$ de dimension 3 ,Q et A sont orthogonaux au même plan $Vect(B,\phi(B))$ ils sont donc colinéaires et $P = aI_4 + bA$.

  On a alors de façon évidente $AP = PA$ donc $\phi(A) = A = P^{-1}AP$. Et comme par construction $\phi(B) = P^{-1}BP$ on a trouvé P solution.
- **Cas général.** Soit ϕ un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. Alors, d'après 4., on sait que $\phi(A)$ est un quaternion pur de même norme que A donc d'après 5., il existe $Q\in\mathbb{H}\setminus\{0\}$ telle que $A = Q^{-1}\phi(A)Q$. Si ϕ_Q désigne l'application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ telle que $\phi_Q(M) = Q^{-1}MQ$, alors $\phi_Q\circ\phi$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ tel que $\phi_Q\circ\phi(A) = A$ donc d'après les cas précédents, il existe $R\in\mathbb{H}\setminus\{0\}$ tel que pour tout M de $\mathbb{H}$, $\phi_Q\circ\phi(M) = R^{-1}MR$. En posant $P = RQ^{-1}$, on a $P\in\mathbb{H}\setminus\{0\}$ et pour tout M de $\mathbb{H}$, $\phi(M) = P^{-1}MP$.