ECOLE DE l'AIR
2003
PC-PSI

Le problème tourne autour du théorème de Weierstrass :
"toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynômes"
les questions 1 et 2 conduisent à l'étude de deux exemples : ϕ est limite uniforme des (P_n) sur $[0,1]$, $x->|x|$ est limite uniforme des (Q_n) sur $[-1,1]$.
Les questions 3,4,5 prouvent le résultat pour une fonction quelconque sur $[0,1]$. et donc aussi sur tout segment $[a,b]$ par changement de variable affine.
Il est donc interdit d'utiliser le théorème de Weierstrass dans le problème.
Sauf précision contraire tous les indices n sont supposés supérieurs ou égaux à 1.
a) Tous les termes de la suite (u_n) sont non nuls et on a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2n-1}{2n+2}$. On a donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{2n-1}{2n+2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4(n+1)n}}=\sqrt{\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}}>1$$

La suite (v_n) est donc strictement croissante
b) D'après le calcul précédent

$$w_n=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}\right)$$

qui est clairement positif.
En comparant les termes de plus haut degré on a $\lim\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}\right)=1$ et donc comme $\ln(v)\sim_1(v-1)$

$$w_n\sim\frac{1}{2}\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n}-1\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{4n^2+4n}\sim\frac{1}{8n^2}$$

La série $\sum w_n$ est donc convergente , par comparaison à une série de Riemann.
la série $\sum(\ln(v_{n+1})-\ln(v_n))$ est donc convergente . La suite $(\ln(v_n))$ est donc convergente (comparaison série , suite) . Donc $v_n=\exp(\ln(v_n))$ est donc une suite convergente par continuité de l'exponentiel.

$$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ converge}}$$

1c) Par croissance de la suite (v_n) on a donc $\sqrt{n}u_n\leq L$

$$\boxed{\forall n\geq 1\ ,\ u_n\leq\frac{L}{\sqrt{n}}}$$

remarque : on a $u_n=\frac{1.2.3.4.5.\cdots(2n-2)(2n-1)(2n)}{(2.4.\cdots(2n-2)(2n))^2}=\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ La formule de Stirling permet alors de prouver que $L=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ mais ne donne pas l'inégalité du **c)**
2a) ϕ est continue sur $[0,1]$ comme composée de $x->(1-x)\in C^0([0,1],[0,1])$ et de $u->\sqrt{u}\in C^0\ ([0,1],[0,1])$ et ϕ est C^∞ sur $[0,1[$ comme composée de $x->(1-x)\in C^0([0,1[,]0,1])$ et de $u->\sqrt{u}\in C^0\ (]0,1],]0,1])$
On a $\phi(x)=(1-x)^{1/2}$ donc $\phi'(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-1/2}$ puis $\phi"(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-3/2}$ et par récurrence

$$\forall n\geq 2:\ \phi^{(n)}(x)=-\left(\frac{1.3.5.\cdots(2n-3)}{2^n}\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n}$$

remarque : l'expression a un sens confus si n = 1
pour $n=2$ on a bien $-\left(\frac{1.3.5.\cdots(2n-3)}{2^n}\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n}=-\left(\frac{1}{4}\right)(1-x)^{1/2-2}$
et si $\phi^{(n)}(x)=-.\left(\frac{1.3.5.\cdots(2n-3)}{2^n}\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n}$ alors

$$\phi^{(n+1)}(x)=-\left(\frac{1.3.5.\cdots(2n-3)}{2^n}\right)\left(-\left(\frac{1}{2}-n\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n-1}\right)$$

et la formule est vérifiée.
2b) P_n est le polynôme de Taylor de ϕ à l'ordre n en zéro :

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}x^k=1-\frac{x}{2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1.3.5.\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n$$

or $\frac{1.3.5.\cdots(2n-3)}{2^n n!}=\frac{1.3.\cdots(2n-3)}{2.4.\cdots 2n}=\frac{u_n}{2n-1}$ le résultat restant vrai si $n=1$: $\frac{1}{2}=\frac{u_1}{1}$

$$\boxed{P_n(x)=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{u_n}{2n-1}x^n}$$

2c) On a $\frac{\phi^{(n+1)}(t)}{n!} = -.\left(\frac{1.3.5.\cdots(2n-1)}{2^{n+1}n!}\right)(1-t)^{-\frac{1}{2}-n} = -\frac{1}{2}u_n\,(1-t)^{-1/2-n}$ pour $n \geq 1$.
Donc

$$R_n(x) = -\frac{u_n}{2}\int_0^x (x-t)^n\,(1-t)^{-n-1/2}\,dt$$

sur $[0,x]$ les deux quantités $(x-t)$ et $(1-t)$ sont positives $(x<1)$. De plus les bornes de l'intégrale sont dans le bon sens donc :

$$|R_n(x)| = \frac{u_n}{2}\int_0^x (x-t)^n\,(1-t)^{-n-1/2}\,dt$$

or $x<1$ donc $(x-t)<(1-t)$. De plus ces quantités sont positives donc $(x-t)^n \leq (1-t)^n$. On a donc

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{u_n}{2}\int_0^x (1-t)^{-1/2}dt}$$

Or $\int_0^x (1-t)^{-1/2}dt = \left[-2\,(1-t)^{1/2}\right]_0^x = 2-2\sqrt{1-x} \leq 2$

$$\boxed{|R_n(x)| \leq u_n}$$

2d) On a donc $\forall x \in [0,1[$, $\left|P_n(x)-\sqrt{1-x}\right| \leq u_n \leq \frac{L}{\sqrt{n}}$
Le membre de gauche est une fonction continue de x et la majoration ne dépend de x donc par passage à la limite :
$\forall x \in [0,1]$, $\left|P_n(x)-\sqrt{1-x}\right| \leq u_n \leq \frac{L}{\sqrt{n}}$ suite indépendante de x et de limite nulle.

$$\boxed{(P_n) \text{ converge uniformément vers } \phi \text{ sur } [0,1]}$$

remarque : attention à x = 1 exclu des questions b) et c) et inclus à la question d)
2e) si on pose $y = 1-x^2$ on a $\phi(y) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$. De plus si $x \in [-1,1]$, $y \in [0,1]$ donc

$$|P_N(y)-\phi(y)| \leq u_N \leq \frac{L}{\sqrt{N}} \leq \frac{L}{\left(\frac{LM}{\varepsilon}\right)} = \frac{\varepsilon}{M}$$

par définition de N .
En revenant à la variable x :

$$\boxed{|Q_N(x)-|x|| \leq \frac{\varepsilon}{M}}$$

3) Le résultat admis est la continuité uniforme de toute fonction continue sur un segment $[a,b]$:

$$\forall\varepsilon>0, \exists\eta_\varepsilon>0, \forall\,(x,y)\in[a,b]^2\ ,\ |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Ce n'est pas à priori la continuité qui dit que f est continue sur I si et seulement si pour tout x de I f est continue en x donc :

$$\forall x \in I, \forall\varepsilon>0, \exists\eta_{\varepsilon,x}>0, \forall y \in I\ ,\ |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

η peut dépendre de x .
Cette notion de "continuité uniforme" est au programme de la classe * et peut-être utilisée à l'X ou au ENS.
3a) Si h est une fonction affine sur $[a,b]$ on a $h(x) = h(a) + \frac{x-a}{b-a}\,(h(b)-h(a))$.
donc ici

$$\text{sur } \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\ ,\ g(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) + (nx-k)\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

Donc $g(x) = (nx-k)\,f\left(\frac{k}{n}\right) + (1-(nx-k)))\,f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + (1-\alpha)\,f\left(\frac{k+1}{n}\right)$ avec $\alpha = (nx-k) \in [0,1]$.
Et évidemment $f(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)f(x)$.
Donc

$$\begin{aligned}
|g(x)-f(x)| &= \left|\alpha(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)) + (1-\alpha)\left(f\,(x)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\right| \\
&\leq \alpha\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + (1-\alpha)\left|f\,(x)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right| \ \underline{\text{car } \alpha \geq 0 \text{ et } (1-\alpha) \geq 0} \\
&\leq \alpha\varepsilon + (1-\alpha)\,\varepsilon = \varepsilon \text{ car } x \in \left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right] \Rightarrow \left|x-\frac{k}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \left|x-\frac{k+1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Le résultat est vrai sur chaque segment $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$ donc sur leur union

$$\boxed{|g(x)-f(x)| \leq \varepsilon}$$

remarque : en choisissant $\varepsilon = 1/p$ on construit une suite (g_p) de fonctions affines par morceaux et qui converge uniformément vers f . Graphiquement on approche le graphe de la courbe par la corde sur chaque segment $\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$. Ca doit vous rappeler quelque chose du cours de Sup ....voir à la fin si vous ne trouvez pas tout seul.
4a)

- Soit (g_1,g_2) deux fonctions de E_{n+1} et (λ_1,λ_2) deux scalaires on a :

$$k\in[0,n]\,(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)(k/n)=\lambda_1 g_1(k/n)+\lambda_2 g_2(k/n)$$

donc

$$\left(\quad(\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2)\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=0}^{n}=\lambda_1\left(\quad g_1\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=0}^{n}+\lambda_2\left(\quad g_2\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{k=0}^{n}$$

- L'image de g est élément de $\mathbb{R}^{n+1}$ par définition même.
- ϕ est un isomorphisme : En effet le noyau de ϕ est réduit à la fonction nulle : Si $\phi(g)=(0)$ on a $\forall k\in[[0..n]]\ g(k/n)=0$. Or g est affine sur $[k/n,(k+1)/n]$

  donc sur ce segment $g(x)=g\left(\frac{k}{n}\right)+(nx-k)\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)=0$. Comme la réunion des segments est $[0,1]$, $\forall x\in[0,1]$ $g(x)=0$

  $\boxed{\phi \text{ est un isomorhisme d'espace vectoriel}}$

- De plus g est définie par la formule : $\forall x\in[k/n,(k+1)/n]$, $g(x)=g\left(\frac{k}{n}\right)+(nx-k)\left(g\left(\frac{k+1}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right)=a_k+(nx-k)(a_{k+1}-a_k)$

4b) Notons $(e_i)_{i=1}^{n+1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. On vérifie que f_j est bien élément de E_{n+1} car affine de pente 1 sur $[k/n,(k+1)/n]$ si $k\geq j$ et de pente -1 si $k<j$.
On a $\phi(f_j)=\left(\frac{j}{n},\frac{j-1}{n},\frac{j-2}{n},\dots,\frac{1}{n},\frac{0}{n},\frac{1}{n},\dots,\frac{n-j}{n}\right)=\frac{j}{n}e_1+\frac{j-1}{n}e_2+\dots+\frac{1}{n}e_j+\frac{1}{n}e_{j+2}+\cdots\frac{n-j}{n}e_{n+1}$.
De façon plus précise la définition de ϕ donne : $\phi(g)=\sum_{k=0}^n g(k/n)e_{k+1}$ et donc $\phi(f_j)=\sum_{i=0}^n\frac{|k-j|}{n}e_{k+1}$.
Si $A'=Mat_{(e_i)}(\phi(f_j))$ le coefficient $a\prime_{i,j}$ est le coefficient de f_{j-1} (le j-eme vecteur car les indices commencent à zéro) sur e_i Soit en posant$k=i-1$ $a'_{i,j}=\frac{|(i-1)-(j-1)|}{n}=\frac{a_{i,j}}{n}$. Donc $A'=\frac{A_{n+1}}{n}$.
A_{n+1} étant inversible , on en déduit que A' est inversible et donc que $(\phi(f_j))$ est une base de $\mathbb{R}^{n+1}$ et donc comme ϕ est un isomorphisme (f_j) est une base de E_{n+1}.
remarque : le passage par ϕ n'est pas obligatoire .D'une part le cardinal est le bon , d'autre par le système est libre. Si on pose le système $\sum_{k=0}^n\lambda_k f_k=0$ et si on écrit le système linéaire obtenu en prenant $x=k/n$ on obtient un système de matrice A' donc de Cramer.
On peut aussi résoudre $\sum_{k=0}^n\lambda_k f_k=0$ en posant le système obtenu par dérivation sur chaque $]k/n,(k+1)/n[$.
4c) La famille (f_k) est une base . D'où l'existence des scalaires λ_k . Si on compose par ϕ on obtient le système

$$\forall i\ ,\ a_i=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k f_k\left(\frac{i}{n}\right)$$

C'est un système de matrice A' inversible , C'est donc un système de Cramer et si on note $Y=\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ et $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix}$ le système $Y=A'\Lambda$ équivaut à $\Lambda=A'^{-1}Y=nB_{n+1}Y$. $\boxed{(\lambda_i)=nB_{n+1}(a_i)\text{ avec des matrices colonnes.}}$
On peut lire B_{n+1} :

$$\begin{array}{r}\lambda_0=n\left(\frac{1-n}{2n}a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2n}a_n\right)\\ \lambda_k=n\left(\frac{1}{2}a_{k-1}-a_k+\frac{1}{2}a_{k+1}\right)\ \text{si } 1\leq k\leq n-1\\ \lambda_n=n\left(\frac{1}{2n}a_0+\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1-n}{2n}a_n\right)\end{array}$$

5a) remplacer a_k par $f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$\begin{array}{r}\lambda_0=n\left(\frac{1-n}{2n}f(0)+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2n}f(1)\right)\\ \lambda_k=n\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right)\ \text{si } 1\leq k\leq n-1\\ \lambda_n=n\left(\frac{1}{2n}f(0)+\frac{1}{2}f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1-n}{2n}f(1)\right)\end{array}$$

5b) On a $g(x)=\sum_{k=0}^n\lambda_k\left|x-\frac{k}{n}\right|$ et $R(x)=\sum_{k=0}^n\lambda_k Q_N\left(x-\frac{k}{n}\right)$. Donc

$$|g(x)-R(x)|\leq\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|\left|\left|x-\frac{k}{n}\right|-Q_N\left(x-\frac{k}{n}\right)\right|$$

or $x\in[0,1]$ et $\frac{k}{n}\in[0,1]$ donc $\left(x-\frac{k}{n}\right)\in[-1,1]$ on peut donc appliquer le résultat de la question 2e)

$$|g(x)-R(x)|\leq\sum_{k=0}^{n}|\lambda_k|\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$$

Or on a choisi g pour avoir $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$

$$\boxed{\sup\left(|f(x) - R(x)|\right) \leq 2\varepsilon}$$

5c) Toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de fonction de polynômiale:
Si on prend $\varepsilon = 1/2p$ on construit un polynôme R_p vérifiant $\sup\left(|f - R_p|\right) \leq \frac{1}{p}$

6) Les deux pivots proposés ne donne pas une matrice triangulaire . Mais on peut développer par rapport à la dernière colonne et obtenir la matrice triangulaire

$$\boxed{\det(A_{n+1}) = (-1)^n.n.2^{n-}}$$

Remarque du **3** : le calcul approché d'une intégrale par la méthode des trapèzes.