préliminaires :

- L'ensemble des permutations (bijections) d'un ensemble de cardinal n est un groupe pour la composition de cardinal $n!$
- En particulier si $n=2$ il y a deux élèments dans S_n : $Id \left\{ \begin{array}{l} 1->1 \\ 2->2 \end{array} \right.$ et $\tau \left\{ \begin{array}{l} 1->2 \\ 2->1 \end{array} \right.$, d'où deux matrices $P_{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Il n'est peut-être pas inutile d'écrire les 6 matrices pour $n=3$, pour voir ce qui se passe. En particulier si $\sigma \left\{ \begin{array}{l} 1->2 \\ 2->3 \\ 3->1 \end{array} \right.$

  On a $u(e_1)=e_2, u\left(e_2\right)=e_3$ et $u\left(e_3\right)=e_1$ donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Je note $\delta_{i,j} = I \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } \int \neq j \end{array} \right.$, le symbole de Kronecker
- Pour éviter toute confusion je garde la notation usuelle $\sigma \circ \sigma'$, sans utiliser la notation simplifiée du sujet.
- Attention au sujet $\mathbb{N}_p$ ne contient pas 0 .

PREMIERE PARTIE

1.a)

- Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base, on a pour tout (i,j) dans $\mathbb{N}_n$ l'égalité $p_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.

  C'est à dire $p_{i,j} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i=\sigma(j) \\ 0 \text{ si } i \neq \sigma(j) \end{array} \right.$

  On a un 1et un seul dans chaque colonne (sur la ligne i telle que $\sigma(j)=i$), et des zéros sinon
- En particulier la matrice P_{Id} est la matrice unité dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$.
- On vérifie d'autre part que si σ et σ' sont dans S_n, pour tout $j \in [[1,n]]$,

$$u_\sigma(u_{\sigma'}(e_j)) = u_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma(\sigma'(j))} = e_{\sigma\circ\sigma'(j)} = u_{\sigma\circ\sigma'}(e_j)$$

  on en déduit les deux endomorphismes étant égaux sur une base que $\underline{u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma\circ\sigma'}}$ et par conséquent $\boxed{P_{\sigma\circ\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}}$.

1.b) On doit vérifier :

- que pour toute bijection σ , P_σ est une matrice inversible : comme $P_\sigma\, P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma\circ\sigma^{-1}} = P_{\mathrm{Id}} = I_n$ P_σ est bien une matrice inversible, et $\boxed{P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}}$
- Que $\phi\left(\sigma\circ\sigma'\right) = \phi\left(\sigma\right)\phi\left(\sigma'\right)$:c'est un résultat de la question 1.a).

$$\boxed{\phi \text{ un morphisme de groupes } S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

1.c) Vue la fin de la question on doit montrer ${}^tP_\sigma = P_\sigma^{-1}$
Soit $Q = {}^tP$ et $R = P^{-1}$, On a donc

$$q_{i,j} = p_{j,i} = 1 \Leftrightarrow j = \sigma(i) \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(j)$$

et si $R = P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$

$$r_{i,j} = 1 \Leftrightarrow i = \sigma^{-1}(j)$$

On a donc $q_{i,j} = 1 \Leftrightarrow r_{i,j} = 1$. Tous les autres coefficients valent 0 . On a donc bien $Q = R$

$$\boxed{{}^tP_\sigma = P_\sigma^{-1}}$$

Cette relation est une C.N.S. pour qu'une matrice carrée soit une matrice orthogonale. $\boxed{\text{La matrice } P_\sigma \text{ est orthogonale}}$
2.) On a en notant $w = u_\sigma^{-1} \circ v \circ u_\sigma$

$$w\left(e_j\right) = u_\sigma^{-1} \circ v \circ u_\sigma\left(e_j\right) = u_\sigma^{-1} \circ v(e_{\sigma(j)}) = u_{\sigma^{-1}}\left(\sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(j)} e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{i,\sigma(j)} e_{\sigma^{-1}(i)}$$

Si v est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est la matrice A, ${}^tP_\sigma\, A\, P_\sigma$ est la matrice de l'endomorphisme $w = u_\sigma^{-1} \circ v \circ u_\sigma$. Donc si $U = {}^tP_\sigma A P_\sigma$ on a que $u_{k,l}$ est la coordonnée de $w\left(e_l\right)$ sur e_k . donc en posant $j = l$ et $\sigma^{-1}(i) = k$ on a

$$u_{k,l} = a_{i,\sigma(l)} = a_{\sigma(k),\sigma(l)}$$

On a donc bien vérifié :

$$\boxed{\left({}^tP_\sigma AP_\sigma\right)_{i,j} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}}$$

3) même si le sujet ne le dit pas , on comprend qu'une matrice irréductible est une matrice qui n'est pas réductible.

3.a) Si $n = 3$ si on prend $r = 2$ on a :

$$A' = \begin{pmatrix} U & V \\ (0) & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & v_1 \\ u_3 & u_4 & v_2 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$$

est réductible . Une matrice de ce type est sans doute trop "trivial" . on prend donc A tel que ${}^tP_\sigma AP_\sigma = A'$ soit $A = P_\sigma A'\,{}^tP_\sigma$ en prenant P_σ la matrice du préliminaire

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 \\ v_1 & u_1 & u_2 \\ v_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$$

En posant le calcul on voit que le produit à droite effectue un changement de l'ordre des ligne , alors que celui à gauche échange l'ordre des colonnes.
En gardant $n = 3$ on peut (doit) prendre un autre exemple avec $r = 1$, Peut-être aussi avec d'autres valeurs de σ .

Si pour tout (i, j) $a_{i,j} \neq 0$ alors pour toute permutation σ $\left({}^tP_\sigma AP_\sigma\right)_{i,j} = a_{\sigma(i)\sigma(j)} \neq 0$. tous les coefficients de A' sont non nuls et A' ne peut pas être du type voulu qui impose $a'_{n,1} = 0$

$$\boxed{\forall (i, j)\,, a_{i,j} \neq 0 \Rightarrow A \text{ est irréductible}}$$

3.b) Les éléments de S_2 sont l'identité et la transposition $\tau \begin{cases} 1- > 2 \\ 2- > 1 \end{cases}$ à laquelle est associée la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
D'autre part ici la seule valeur de r possible est $r = 1$, puisque $0 < r < 2$. Pour que $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ soit réductible, il faut et il suffit que le coefficient $(2, 1)$ de l'une des matrices A ou ${}^tPAP = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{1,2} \end{pmatrix}$ soit nul .
A est réductible si et seulement si $a_{2,1} = 0$ ou $a_{1,2} = 0$. Par la contraposée

$$\boxed{a_{1,2}a_{2,1} \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ irréductible.}}$$

La réciproque de la question a) n'est pas vraie puisque la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est irréductible d'après ce qui précède mais a des termes nuls.

3.c) Si A est réductible, il existe $\sigma \in S_n$ etel que $A' = {}^tP_\sigma AP_\sigma = \begin{pmatrix} U & V \\ (0) & W \end{pmatrix}$.
Comme ${}^tP = P^{-1}$, on a des matrices semblables et ${}^tP_\sigma A^p P_\sigma = A'^p = \begin{pmatrix} U^p & ? \\ (0) & W^p \end{pmatrix}$ d'après le produit de matrices triangulaires par blocs. Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } A \text{ est réductible, pour tout } p \in \mathbb{N},\ A^p \text{ est réductible}}$$

Si p est un entier naturel tel que tous les coefficients de A^p sont $\neq 0$, d'après 3.a) A^p est irréductible, donc A est irréductible.
On constate que si :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui prouve que la matrice $\boxed{A \text{ est irréductible}}$.
La matrice M est irréductible d'après le critère de la question 3.b). De plus $M^2 = I_2$ et donc pour tout entier p $M^p = M$ ou I_2 a des coefficients nuls.
<u>La réciproque de la question précédente est fausse.</u>

4.a)
Remarque : la permutation proposée existe bien . Il suffit de classer les éléments de J par ordre croissant $j_1 < j_2 \cdots < j_p$, et de même ceux de I : $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-p}$ et de prendre $\sigma : \begin{cases} a- > j_a \text{ si } a \leq p \\ a- > i_{a-p} \text{ si } a > p \end{cases}$
On prend une permutation σ telle que $\sigma(\mathbb{N}_p) = J$ alors pour tout i si $i \leq p$ on a $\sigma(i) \in J$ et donc comme σ est une bijection si $i > p$ $\sigma(i) \notin J$ et donc $\sigma(i) \in J$.
Si on pose $A' = {}^tP_\sigma AP$ on a donc d'après la question 2 : $a'_{i,j} = a_{\sigma(i),\sigma(j)}$.
Donc pour $j \leq p$ et $i > p$ $a'_{i,j} = 0$ car $(\sigma(i), \sigma(j)) \in I \times J$

et donc si ce qui prouve que le bloc constitué des colonnes $1..p$ et des lignes $(p+1)..n$ de la matrice ${}^tP_\sigma A P_\sigma$ est nul. Par définition, la matrice A est donc réductible en prenant $k = p$.
Remarque : le sujet proposé avec $\sigma(\mathbb{N}_p) = I$ permet aussi de conclure , mais de façon plus compliqué .
4.b) Réciproquement si ${}^tP_\sigma A P_\sigma = A'$ alors $A = {}^tP_{\sigma^{-1}} A' P_{\sigma^{-1}}$ (car $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma_{-1}}$) et donc toujours avec la formule du 2) $a_{i,j} = a'_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$. Donc $a_{i,j} = 0$ si $\sigma^{-1}(j) \leq p$ et $\sigma^{-1}(i) > p$ (forme par blocs de A') , donc si on pose $J = \sigma(\mathbb{N}_p)$ et $I = \sigma([[p+1,n]])$ on a

$$(i,j) \in I \times J \Rightarrow \left(\sigma^{-1}(j) \in [[1,p]] \text{ et } \sigma^{-1}(i) \in [[p+1,n]]\right) \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

4.c) Pour $\sigma \in S_n$, la matrice de passage de la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ à la base $B_\sigma = (e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ est la matrice P_σ. Donc si A est la matrice de l'endomorphisme v dans la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$, alors $A' = P_\sigma^{-1} A P_\sigma$ est la matrice de v dans la base B_σ.
Si $M = mat_B(f)$ est triangulaire par blocs , alors le sous espace vectoriel engendré par les premiers vecteurs de base est stable : $M = \begin{pmatrix} U & V \\ (0) & W \end{pmatrix}$, $U \in M_p(\mathbb{K})$ alors pour $j \leq k$

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^p m_{i,j} e_i + \sum_{i=p+1}^n m_{i,j} e_j = \sum_{i=1}^p u_{i,j} e_i + \sum \overrightarrow{0} \in Vect\,(e_i)_{i=1}^k$$

Et réciproquement si $Vect\,(e_i)_{i=1}^p$ est stable pour $j \leq p$ et $i > p$, $m_{i,j}$ est la coordonnée de $f(e_j)$ sur e_i donc $m_{i,j} = 0$.
Donc ici $Vect(e_{\sigma(1)}, \cdots e_{\sigma(p)})$ est stable par v si et seulement si A' est triangulaire par blocs.
On voit donc que $\boxed{A \text{ est réductible si, et seulement si, il existe } L = \{\sigma(1), \cdots \sigma(p)\} \text{ tel que } Vect\,(e_i)_{i \in L} \text{ soit stable pat } v}$.

Seconde Partie

1) Soit k tel que $|x_k| = \|X\|_\infty$ (donc $x_k \neq 0$), puisque $AX = \lambda X$, on a l'égalité :

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j}\, x_j = \lambda\, x_k \quad \text{d'où} \quad (\lambda - a_{k,k})\, x_k = \sum_{j \neq k} a_{k,j}\, x_j$$

On en déduit :

$$|\lambda - a_{k,k}|\, |x_k| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|\, |x_j| \leq \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|\, \|X\|_\infty = \Lambda_k\, |x_k|$$

Comme $x \neq \overrightarrow{0}$, $|x_k| \neq 0$ (puisque $|x_k|$ est le maximum des modules) .En divisant par $|x_k|$ on obtient l'inégalité $|\lambda - a_{k,k}| \leq \Lambda_k$, donc $\lambda \in D_k$.
λ est élément de l'un des D_j donc de l'union. $\boxed{\lambda \in \cup_{j=1}^n D_j}$.
2) On sait de manière générale qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant donc même polynôme caractéristique, donc même spectre. Les valeurs propres de A respectent les conditions trouvées dans la question précédente pour A et aussi celles provenant du fait que ce sont les valeurs propres de ${}^tA$.
Les conditions obtenues en appliquant la question précédente à A donnent $|\lambda - 1| \leq 3$ ou $|\lambda - 5| \leq 4$ ou $|\lambda + 1| \leq 9$ (figure 1)
Les conditions obtenues en appliquant la question précédente à ${}^tA$ donnent $|\lambda - 1| \leq 6$ ou $|\lambda - 5| \leq 6$ ou $|\lambda + 1| \leq 4$ (figure 2)
La partie du plan dans laquelle doit se trouver λ est l'intersection des deux domaines précédents (figure 3).
3.a) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}_n$ tel que $|\lambda - a_{k,k}| < \Lambda_k$; on peut poser $\varepsilon = \Lambda_k - |\lambda - a_{k,k}| > 0$; on voit que le disque ouvert de centre λ et de rayon ε, noté $B(\lambda, \varepsilon)$, est inclus dans D_k puisque :(cf figure 4)

$$|z - \lambda| < \varepsilon \Rightarrow |z - a_{k,k}| \leq |z - \lambda| + |\lambda - a_{k,k}| < \varepsilon + |\lambda - a_{k,k}| = \Lambda_k$$

On en déduit :

$$B(\lambda, \varepsilon) \subset D_k \subset \bigcup_{j=1}^n D_j \ ,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\forall k, |a_{k,k} - \lambda| \geq \Lambda_k}$$

3.b) Il est sous-entendu qu'ici λ est la valeur propre de A associé au vecteur propre X .
Dans le calcul de la question 1) on a prouvé que si $|x_k| = \|X\|_\infty$, alors $|\lambda - a_{k,k}| \leq \Lambda_k$;, or on vient de prouver $|a_{k,k} - \lambda| \geq \Lambda_k$. On a donc :

$$\boxed{|a_{k,k} - \lambda| = \Lambda_k}$$

3.c) Soit $i \in I$, puisque $AX = \lambda X$, on a l'égalité :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}\, x_j = \lambda\, x_i \quad \text{soit} \quad (\lambda - a_{i,i})\, x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}\, x_j$$

On en déduit :

$$|\lambda - a_{i,i}|\,|x_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,|x_j|$$

Mais comme d'après b) $\Lambda_i = |\lambda - a_{i,i}|$, on a $\sum_{i\neq j} |a_{i,j}| = |\lambda - a_{i,i}|$ et donc $\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,|x_i| \leq \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,|x_j|$ .i est tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$ ce qui donne donc :

$$\boxed{\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\,(\|X\|_\infty - |x_j|) \leq 0}$$

.

Les termes de cette somme étant tous ≥ 0, il sont nécessairement tous nuls: $\forall i \neq j$: $|a_{i,j}|\,(\|X\|_\infty - |x_j|)$
et donc $|a_{i,j}| = 0$ ou $\|X\|_\infty = |x_j|$ (ce qui équivaut à $j \in I$)
si $i \in I$ et $j \notin I$, alors $i \neq j$ et $\|X\|_\infty \neq |x_j|$ et donc $a_{i,j} = 0$
3.d) L'ensemble I n'est pas vide car $\exists i\ \ |x_i| = \|X\|_\infty$. Si le complémentaire J de I est non vide alors le cardinal de J est un entier p tel que $0 < p < n$, donc d'après la question I4.a) la matrice A est réductible, ce qui est contraire à l'hypothèse de cette question.
On en déduit $I = \mathbb{N}_n$; les coordonnées de X ont toutes même module, et d'après b), $\forall k \in \mathbb{N}_n\ \ \Lambda_k = |\lambda - a_{k,k}|$. et donc

$$\boxed{\lambda \in \cap_{k=1}^{n} C_k}$$

Troisième Partie

1) Si A est à diagonale strictement dominante, 0 n'appartient à aucun des disques D_k car $|a_{k,k} - 0| = |a_{k,k}| > \Lambda_k$, donc 0 n'est pas valeur propre de A. Cela prouve que le noyau est réduit au vecteur nul.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est à diagonale strictement dominante , } A \text{ est inversible}}$$

2.a) Les points intérieurs à D_k sont les points dont l'affixe z vérifie $|z - a_{k,k}| < \Lambda_k$. Ce n'est pas le cas pour 0 par définition même ($\forall k$, $|a_{k,k}| \geq \Lambda_k$
2.b) Puisque A est fortement dominante $\forall k\ \ |\lambda - a_{k,k}| \geq \Lambda_k$ pour $\lambda = 0$. Si $0 \in Sp(A)$, comme A est irréductible et que le a) de la question I 3) est vérifié avec $\lambda = 0$, on peut en déduire comme dans cette partie que 0 est sur tous les cercles C_k pour tout k; mais ceci est ici exclu par définition ($\exists j \quad |a_{j,j}| > \Lambda_j$). On en déduit que 0 n'est pas dans le spectre de A et A est inversible.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ est à diagonale fortement dominante et irréductible, } A \text{ est inversible}}$$

3) Soit $\lambda \in Sp(A)$; d'après II 1), $\exists k \in \mathbb{N}_n\ \ |\lambda - a_{k,k}| \leq \Lambda_k \leq a_{k,k}$,
λ est donc dans le disque de centre $a_{k,k}$ tangent en 0 à l'axe des y .Le seul point du disque de partie réelle négative ou nulle est l'origine, point exclu par la question 2 . Donc $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. (figure 5)
moins géométrique : Si $\lambda = x + iy$, $|x - a_{k,k}| = |\mathrm{Re}(\lambda - a_{k,k})| \leq |\lambda - a_{k,k}| \leq a_{k,k}$. Donc $x - a_{kk} \geq -a_{k,k}$ et $x \geq 0$. Si $x = 0$ alors $\lambda - a_{k,k} = iy - a_{k,k}$ et donc $|\lambda - a_{kk}|^2 = y^2 - a_{k,k}^2$. La condition $|\lambda - a_{k,k}| \leq a_{k,k}$ donne $y = 0$ donc $\lambda = 0$. Exclu . donc $x > 0$ et $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda) > 0}$
Le déterminant de la matrice est le produit des valeurs propres (avec multiplicité) . Comme la matrice est réelle , son polynôme caractéristique est à coefficients réels . Les valeurs propres non réelles sont donc deux à deux conjugués et les racines conjugués ont même multiplicité.
Séparons les valeurs propres en deux:

- les valeurs propres réelles sont strictement positives (question précédente) , donc leur produit est strictement positif.
- les valeurs propres non réelles se regroupent par deux . Le produit d'un complexe non nul et de son conjugué étant un réel strictement positif , le produit des racines non réels est un réel strictement positif.
- Par produit de deux réels strictement positifs

$$\boxed{\det(A) > 0}$$

4) Comme A est symétrique réelle ses valeurs propres sont toutes réelles, > 0 d'après 3).
le polynôme caractéristique de A est $X^2 - 6X + 1$ de racines $\frac{6\pm\sqrt{32}}{2}$ strictement positives.
La matrice A est symétrique, irréductible d'après I 3)b) et ses valeurs propres sont réelles strictement positives mais sa diagonale n'est pas dominante puisque $a_{1,1} = 1 < 2 = a_{1,2}$.
Il n'y pas de réciproque à la question précédente.