

0.1. Exercice 3

1) a) Comme $2n - 1$ est un entier strictement positif, on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} 1 &= (1 - X + X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1 - X)^{2n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1 - X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1 - X)^{2n-1-k} \end{aligned}$$

soit

$$1 = (1 - X)^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1 - X)^{n-1-k} \right) + X^n \left(\sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1 - X)^{2n-1-k} \right)$$

posons :

$$f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} X^k (1 - X)^{n-1-k}, g_n(X) = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1 - X)^{2n-1-k}$$

On a aussi :

$$g_n(X) = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n-1}{n+l} X^l (1 - X)^{n-1-l}$$

chaque terme de f_n (et de g_n) est un produit de deux polynômes et le degré du produit est $n-1$. Donc par somme f_n (et g_n) est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par construction $(1 - X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$.

D'où une solution du problème

b) $f_1(X) = 1, f_2(X) = 2X + 1, f_3(X) = 6X^2 + 3X + 1$

2)

analyse : Si $(1 - X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$ alors $(1 - X)^n (A(X) - f_n(X)) = X^n (g_n(X) - B(X))$

0 est racine d'ordre au moins n de $(1 - X)^n (A(X) - f_n(X))$ donc de $(A(X) - f_n(X))$

il existe donc un polynôme Q tel que $A(X) - f_n(X) = X^n Q$ et $X^n (g_n(X) - (1 - X)^n Q - B(X)) = 0$

On peut simplifier par X^n donc : $B(X) = g_n(X) + (1 - X)^n Q$

vérification : $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ et $B(X) = g_n(X) - (1 - X)^n Q$ alors $(1 - X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$

Donc $\left\{ \begin{array}{l} (1 - X)^n A(X) + X^n B(X) = 1 \\ A, B \in \mathbb{R}[X] \end{array} \right. \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X], \left\{ \begin{array}{l} A(X) = f_n(X) + X^n Q \\ B(X) = g_n(X) - (1 - X)^n Q \end{array} \right.$

si A est de degré inférieur ou égal à $n - 1$, $d^\circ(X^n Q) = d^\circ(A - f_n) \leq (n - 1)$ donc $d^\circ(Q) < 0$ et donc $Q = 0$.

Il y a unicité de f_n et donc de g_n

3) a) Si $(1 - X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$ alors $(X)^n f_n(1 - X) + (1 - X)^n g_n(1 - X) = 1$

$f_n(1 - X)$ et $g_n(1 - X)$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifient $(1 - X)^n g_n(1 - X) + X^n f_n(1 - X) = 1$

d'après l'unicité de f_n et g_n

$$f_n(1 - X) = g_n(X) \text{ et } g_n(1 - X) = f_n(X)$$

On peut aussi passer par le calcul :

$$f_n(1 - X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1 - X)^k (X)^{n-1-k} = \sum_{l=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2n-1-l} (1 - X)^{n-1-l} (X)^l \text{ en posant } l = 2n - 1 - k$$

et comme $\binom{2n-1}{2n-1-l} = \binom{2n-1}{l}$ on retrouve l'expression de g_n .

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} x^k (1 - x)^{n-1-k}$ donc

• pour $x = 0$ on obtient $f_n(0) = 1$ (le seul terme non nul est pour $k = 0$)

• pour $x = 1$ on obtient $f_n(1) = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$ (terme pour $k = n - 1$)

- pour $x = 1/2$ on a $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ qui peut se simplifier car

$$\begin{aligned} 2^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2n-1-p} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} + \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \end{aligned}$$

d' où

$$\boxed{f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}}$$

- Il est peut-être plus simple de partir de la relation initiale en utilisant $f_n(1-x) = g_n(x)$ donc $f_n(1/2) = g_n(1/2)$ et $(1-x)^n f_n(x) + x^n g_n(x) = 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n (f_n(1/2) + g_n(1/2)) = 1$

$$\boxed{f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}}$$

4) a) Si $x \neq 1$ donc en particulier sur $] -1, 1[$,

$$f_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n} + x^{n-1} \frac{xg_n(x)}{(1-x)^n}$$

comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg_n(x)}{(1-x)^n} = 0$,

$$\boxed{f_n(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} (1-x)^{-n} + o(x^{n-1})}$$

b) f_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $f_n(x)$ est la partie principale du développement limité à l'ordre $(n-1)$ de $(1-x)^{-n}$. Du développement limité

$$(1+u)^a = 1 + au + \dots = 1 + \sum_{k=0}^n \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{k!} u^k + o(u^n)$$

quand u tend vers 0 on déduit :

$$(1-x)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-n)\dots(-n-k+1)}{k!} (-1)^k x^k + o(x^{n-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} x^k + o(x^{n-1})$$

donc

$$\boxed{f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{n-1} C_{n+k-1}^{n-1} X^k}$$

- pour $x = 0$ on retrouve $f_n(0) = C_{n-1}^{n-1} = 1$.
- :pour $x = 1$ on trouve $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} = \binom{2n-1}{n-1}$
- :pour $x = 1/2$ on trouve $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^k} = 2^{n-1}$

c) Les coefficients de f_n sont tous positifs, le coefficient constant est 1, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) \geq 1$

$$\boxed{\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ n'a pas de racine positive ou nulle}}$$

5) a) en dérivant la relation $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$, on obtient :

$$(1-X)^{n-1} (nf_n(X) - (1-X)f'_n(X)) = X^{n-1} (ng_n(X) + Xg'_n(X))$$

On reconnaît dans le membre de gauche l'expression souhaitée par le sujet. Pour montrer que c'est un multiple de X^{n-1} il faut trouver la méthode pour simplifier. Si on a su faire la question 2 il suffit de reprendre l'idée:

$nf_n(X) - (1-X)f'_n(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$ qui admet 0 comme racine d'ordre au moins $(n-1)$ donc il existe un réel k tel que $nf_n(X) - (1-X)f'_n(X) = kX^{n-1}$, $f_n(1) = \binom{2n-1}{n}$ donc en regardant le coefficient dominant : $k = n \binom{2n-1}{n}$. Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, nf_n(x) - (1-x)f'_n(x) = n \binom{2n-1}{n} x^{n-1}}$$

b) Supposons que l'équation $f_n(x) = 0$ ait au moins deux racines réelles strictement négatives, notons a et b deux racines consécutives de f_n , ($a < b < 0$)

$$f'_n(a) = \frac{-n \binom{2n-1}{n} a^{n-1}}{1-a} \text{ donc } f'_n(a) \text{ est non nulle et du signe de } (-1)^n \text{ de même pour } f'_n(b).$$

Supposons par exemple n pair. On a $f_n(a) = 0$ et $f'_n(a) > 0$, donc sur un petit intervalle $]a, a + \varepsilon[$ $f_n(x) > 0$, de même sur $]b - \varepsilon, b[$ $f_n(x) < 0$. f_n étant continue il existe une racine entre a et b .

.ABSURDE car a et b sont supposés consécutives.

f_n admet au plus une racine négative

6) h_n est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'_n(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

h_n est un polynôme dont $h_n \sim_{\pm\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$ donc

si n est pair, $\lim_{+\infty} h_n = -\infty$, $\lim_{-\infty} h_n = +\infty$,

si n est impair, $\lim_{+\infty} h_n = +\infty$, $\lim_{-\infty} h_n = -\infty$

x	$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$	x	$-\infty$ 0 1 $+\infty$
h'_{2n+1}	0 $+$ 0	h'_{2n}	$-$ 0 $+$ 0 $-$
h_{2n+1}	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$	h_{2n}	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $h_n(1)$ ↘ $-\infty$

7) a) Sur $] -\infty, 1[$, f_n est l'unique solution vérifiant $f_n(0) = 1$ de l'équation différentielle résoluble :

$$(E) \quad (1-x)y' - ny = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}$$

L'équation sans second membre a pour solution toutes les fonctions : $g(x) = \lambda \exp(-n \ln(x-1)) = \frac{\lambda}{(x-1)^n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

On calcul maintenant f_n par variation de la constante :

$x \rightarrow \frac{\lambda(x)}{(1-x)^n}$ est solution de (E) sur $] -\infty, 1[$ si et seulement si $\lambda'(x) = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

donc si et seulement si $\lambda(x) = -nC_{2n-1}^n h_n(x) + Cste$ sur $] -1, +\infty[$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in] -1, +\infty[$,

$$f_n(x) = \frac{k - n \binom{2n-1}{n} h_n(x)}{(1-x)^n}$$

$f_n(0) = 1$ donc $k = 1$ donc pour tout $x \in] -\infty, 1[$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$

deux fonctions polynômes égales sur $] -\infty, 1[$ (ensemble infini) sont égales sur \mathbb{R}

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$ donc :

$$\forall x \neq 1, f_n(x) = \frac{1 - n \binom{2n-1}{n} h_n(x)}{(1-x)^n}$$

b) f_n est un polynôme donc est continue en 1 donc:

$$f_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1 - n \binom{2n-1}{n} h_n(x)}{(1-x)^n} \right)$$

Pour étudier la limite on revient au voisinage de 0 en posant $u = x - 1$

$$f_n(1) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1 - n \binom{2n-1}{n} h_n(u+1)}{(-u)^n} \right)$$

or $h'(u+1) = (1+u)^{n-1}(-u)^{n-1} = (1+o(1))(-u)^{n-1} = (-1)^{n-1}(u^{n-1} + o(u^{n-1}))$

la fonction étant C^∞ on peut intégrer termes à termes le développement limité en intégrant sa partie principale

:

$$h_n(1+u) - h_n(1) = (-1)^{n-1} \left(\frac{u^n}{n} \right) + o(u^n)$$

donc si $h_n(1) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}}$,

$$\frac{1 - n \binom{2n-1}{n} h_n(u+1)}{(-u)^n} = \frac{(-1)^n \binom{2n-1}{n} u^n + o(u^n)}{(-1)^n u^n}$$

On retrouve bien par passage à la limite $f_n(1) = \binom{2n-1}{n}$

Reste à calculer $h_n(1)$, ce qui peut se faire par récurrence et intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1} dx &= \left[\frac{x^n}{n}(1-x)^{n-1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n}(n-1)(1-x)^{n-2} dx = \frac{n-1}{n} \int_0^1 x^n(1-x)^{n-2} dx \\ &= \frac{(n-1) \cdots (n-k-2)}{n(n+1)(n+2) \cdots (n+k-1)} \int_0^1 x^{n+k-1}(1-x)^{n-k-1} dx \text{ récurrence à rédiger} \\ &= \frac{(n-1) \cdots 1}{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)} = \frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}} \end{aligned}$$

8) $x \in]-\infty, 0[$ est solution de $f_n(x) = 0$ si et seulement si $h_n(x) = \frac{1}{n \binom{2n-1}{n}} > 0$

En utilisant les variations de h_n vues au 6) on en déduit que :

Si n est impair $f_n(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 0[$ donc pas de solution sur \mathbb{R}

Si n est pair $f_n(x) = 0$ a une solution et une seule sur $]-\infty, 0[$ donc une solution et une seule sur \mathbb{R}

9) $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} z^k$ d'après 4).

Par l'absurde : supposons $|z| \geq 1$ et $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} z^k$. On a donc :

$$f_n(z) = \binom{2n-2}{n-1} z^{n-1} \left(1 + \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{z^{k-n+1}} \right)$$

soit $B = \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{z^{k-n+1}}$, $|B| \leq \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n+k-1}{k}$

Or d'après la formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$ donc $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}$

$$|B| \leq \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} \right) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n-2}{n-1}} = \frac{\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}} = \frac{(n-1)!(n-1)!}{n!(n-2)!} = \frac{n-1}{n} < 1$$

donc $1 + B$ ne s'annule pas et si $|z| \geq 1$, $f_n(z) \neq 0$.

donc toutes les racines complexes de $f_n(z) = 0$ sont de modules strictement inférieurs à 1