e3a PC Mathématiques 2

0.1. Exercice 3

1) a) Comme $2n-1$ est un entier strictement positif , on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}1 &= (1-X+X)^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{2n-1-k}\end{aligned}$$

soit

$$1 = (1-X)^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}\right) + X^n\left(\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}\right)$$

posons :

$$\boxed{f_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1}\tbinom{2n-1}{k}X^k(1-X)^{n-1-k}, g_n(X) = \sum_{k=n}^{2n-1}\tbinom{2n-1}{k}X^{k-n}(1-X)^{2n-1-k}}$$

On a aussi :

$$g_n(X) = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n-1}{n+l}X^l(1-X)^{n-1-l}$$

chaque terme de f_n (et de g_n) est un produit de deux polynômes et le degré du produit est $n-1$. Donc par somme f_n (et g_n) est un polynôme de degré inférieur ou égl à $n-1$. Par construction $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$.

D'où <u>une solution</u> du problème

b) $\boxed{f_1(X) = 1 \ , \ f_2(X) = 2X+1 \ , \ f_3(X) = 6X^2+3X+1}$

2)

<u>analyse</u> : Si $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$ alors $(1-X)^n (A(X) - f_n(X)) = X^n (g_n(X) - B(X))$

0 est racine d'ordre au moins n de $(1-X)^n (A(X) - f_n(X))$ donc de $(A(X) - f_n(X))$

il existe donc un polynôme Q tel que $A(X) - f_n(X) = X^n Q$ et $X^n (g_n(X) - (1-X)^n Q - B(X)) = 0$

On peut simplifier par X^n donc : $B(X) = g_n(X) + (1-X)^n Q$

<u>vérification</u> : $A(X) = f_n(X) + X^n Q$ et $B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q$ alors $(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1$

$$\boxed{\text{Donc} \left\{\begin{array}{c}(1-X)^n A(X) + X^n B(X) = 1 \\ A, B \in \mathbb{R}[X]\end{array}\right. \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \ , \left\{\begin{array}{l}A(X) = f_n(X) + X^n Q \\ B(X) = g_n(X) - (1-X)^n Q\end{array}\right.}$$

si A est de degré inférieur ou égal à $n-1$, $d^\circ(X^n Q) = d^\circ(A - f_n) \leq (n-1)$ donc $d^\circ(Q) < 0$ et donc $Q = 0$.

$$\boxed{\text{Il y a unicité de } f_n \text{ et donc de } g_n}$$

3) a) Si $(1-X)^n f_n(X) + X^n g_n(X) = 1$ alors $(X)^n f_n(1-X) + (1-X)^n g_n(1-X) = 1$

$f_n(1-X)$ et $g_n(1-X)$ sont des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ qui vérifient $(1-X)^n g_n(1-X) + X^n f_n(1-X) = 1$ d'après l'unicité de f_n et g_n

$$\boxed{f_n(1-X) = g_n(X) \text{ et } g_n(1-X) = f_n(X)}$$

On peut aussi passer par le calcul :

$$f_n(1-X) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}(1-X)^k(X)^{n-1-k} = \sum_{l=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2n-1-l}(1-X)^{n-1-l}(X)^l \text{ en posant } l = 2n-1-k$$

et comme $\binom{2n-1}{2n-1-l} = \binom{2n-1}{l}$ on retrouve l'expression de g_n .

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}$ donc

- pour $x = 0$ on obtient $\boxed{f_n(0) = 1}$ (le seul terme non nul est pour $k = 0$)
- pour $x = 1$ on obtient $\boxed{f_n(1) = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n} = \frac{(2n-1)!}{n!\,(n-1)!}}$ (terme pour $k = n-1$)

- pour $x=1/2$ on a $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ qui peut se simplifier car

$$\begin{aligned}
2^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}+\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}+\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n-1}{2n-1-p}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}+\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}\\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-1}{k}
\end{aligned}$$

d' où

$$\boxed{f_n\left(\tfrac{1}{2}\right)=2^{n-1}}$$

- Il est peut-être plus simple de partir de la relation initiale en utilisant $f_n(1-x)=g_n(x)$ donc $f_n(1/2)=g_{,n}(1/2)$ et

$(1-x)^n f_n(x)+x^n g_n(x)=1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(f_n(1/2)+g_n(1/2)\right)=1$

$$\boxed{f_n\left(\tfrac{1}{2}\right)=2^{n-1}}$$

4) a) Si $x\neq 1$ donc en particulier sur $]-1,1[$,

$$f_n(x)=\frac{1}{(1-x)^n}+x^{n-1}\frac{xg_n(x)}{(1-x)^n}$$

comme $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg_n(x)}{(1-x)^n}=0$,

$$\boxed{f_n(x)\underset{x\to 0}{=}(1-x)^{-n}+o\left(x^{n-1}\right)}$$

b) f_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc $f_n(x)$ est la partie principale du développement limité à l'ordre $(n-1)$ de $(1-x)^{-n}$. Du développement limité

$$(1+u)^a=1+au+\cdots=1+\sum_{k=0}^{n}\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{k!}u^k+o\left(u^n\right)$$

quand u tend vers 0 on déduit :

$(1-x)^{-n}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-n)\dots(-n-k+1)}{k!}(-1)^k x^k+o(x^{n-1})=1+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}x^k+o(x^{n-1})$

donc

$$\boxed{f_n(X)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}X^k=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{n-1}C_{n+k-1}^{n-1}X^k}$$

- pour $x=0$ on retrouve $f_n(0)=C_{n-1}^{n-1}=1$.
- :pour $x=1$ on trouve $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}=\binom{2n-1}{n-1}$
- :pour $x=1/2$ on trouve $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n+k-1}{k}}{2^k}=2^{n-1}$

c) Les coefficients de f_n sont tous positifs, le coefficient constant est 1, donc $\forall x\in\mathbb{R}^+$, $f_n(x)\geq 1$

$$\boxed{\text{L'équation } f_n(x)=0 \text{ n'a pas de racine positive ou nulle}}$$

5) a) en dérivant la relation $(1-X)^n f_n(X)+X^n g_n(X)=1$, on obtient :
$(1-X)^{n-1}\left(nf_n(X)-(1-X)f_n'(X)\right)=X^{n-1}\left(ng_n(X)+Xg_n'(X)\right)$
On reconnaît dans le membre de gauche l'expression souhaitée par le sujet. Pour montrer que c'est un multiple de X^{n-1} il faut trouver la méthode pour simplifier. Si on a su faire la question 2 il suffit de reprendre l'idée:
$nf_n(X)-(1-X)f_n'(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$ qui admet 0 comme racine d'ordre au moins $(n-1)$ donc il existe un réel k tel que $nf_n(X)-(1-X)f_n'(X)=kX^{n-1}$, $f_n(1)=\binom{2n-1}{n}$ donc en regardant le coefficient dominant : $k=n\binom{2n-1}{n}$.Donc

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ nf_n(x)-(1-x)f_n'(x)=n\binom{2n-1}{n}x^{n-1}}$$

b) Supposons que l'équation $f_n(x) = 0$ ait au moins deux racines réelles strictement négatives, notons a et b deux racines consécutives de f_n , ($a < b < 0$)

$f_n'(a) = \dfrac{-n\binom{2n-1}{n}a^{n-1}}{1-a}$ donc $f_n'(a)$ est non nulle et du signe de $(-1)^n$ de même pour $f_n'(b)$.

Supposons par exemple n pair . On a $f_n(a) = 0$ et $f_n'(a) > 0$,donc sur un petit intervalle $]a, a+\varepsilon[$ $f_n(x) > 0$, de même sur $]b-\varepsilon, b[$ $f_n(x) < 0$. f_n étant continue il existe une racine entre a et b .
.ABSURDE car a et b sont supposés consécutives.

$$\boxed{f_n \text{ admet au plus une racine négative}}$$

6) h_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n'(x) = x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

h_n est un polynôme dont $h_n \sim_{\pm\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}$ donc

si n est pair , $\lim\limits_{+\infty} h_n = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} h_n = +\infty$,

si n est impair , $\lim\limits_{+\infty} h_n = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} h_n = -\infty$

x	$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$
h'_{2n+1}	$0 \quad + \quad 0$
h_{2n+1}	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

x	$-\infty \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$
h'_{2n}	$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$
h_{2n}	$+\infty \searrow 0 \nearrow h_n(1) \searrow -\infty$

7) a) Sur $]-\infty, 1[$, f_n est l'unique solution vérifiant $f_n(0) = 1$ de l'équation différentielle résoluble :

$(E) \quad (1-x)y' - ny = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}$

L'équation sans second membre a pour solution toutes les fonctions : $g(x) = \lambda \exp(-n\ln(x-1)) = \frac{\lambda}{(x-1)^n}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

On calcul maintenant f_n par variation de la constante :

$x \to \frac{\lambda(x)}{(1-x)^n}$ est solution de (E) sur $]-\infty, 1[$ si et seulement si $\lambda'(x) = -nC_{2n-1}^n x^{n-1}(1-x)^{n-1}$

donc si et seulement si $\lambda(x) = -nC_{2n-1}^n h_n(x) + Cste$ sur $]-1, +\infty[$

donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$f_n(x) = \frac{k - n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}$$

$f_n(0) = 1$ donc $k = 1$ donc pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$

deux fonctions polynômes égales sur $]-\infty, 1[$ (ensemble infini) sont égales sur $\mathbb{R}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1-x)^n f_n(x) = 1 - nC_{2n-1}^n h_n(x)$ donc :

$$\boxed{\forall x \neq 1 \ , \ f_n(x) = \frac{1 - n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}}$$

b) f_n est un polynôme donc est continue en 1 donc:

$$f_n(1) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{1 - n\binom{2n-1}{n}h_n(x)}{(1-x)^n}\right)$$

Pour étudier la limite on revient au voisinage de 0 en posant $u = x - 1$

$$f_n(1) = \lim_{u->0}\left(\frac{1 - n\binom{2n-1}{n}h_n(u+1)}{(-u)^n}\right)$$

or $h'(u+1) = (1+u)^{,n-1}(-u)^{n-1} = (1+o(1))\,(-u)^{n-1} = (-1)^{n-1}\left(u^{n-1} + o(u^{n-1})\right)$

la fonction étant C^∞ on peut intégrer termes à termes le développement limité en intégrant sa partie principale :

$$h_n(1+u) - h_n(1) = (-1)^{n-1}\left(\frac{u^n}{n}\right) + o\left(u^n\right)$$

donc si $h_n(1) = \frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}$,

$$\frac{1 - n\binom{2n-1}{n}h_n(u+1)}{(-u)^n} = \frac{(-1)^n\binom{2n-1}{n}u^n + o\left(u_n\right)}{(-1)^n u^n}$$

$\boxed{\text{On retrouve bien par passage à la limite } f_n(1) = \binom{2n-1}{n}}$

Reste à calculer $h_n(1)$, ce qui peut se faire par récurrence et intégration par partie :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}dx &= \left[\frac{x^n}{n}(1-x)^{n-1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^n}{n}(n-1)(1-x)^{n-2}dx = \frac{n-1}{n}\int_0^1 x^n(1-x)^{n-2}dx \\
&= \frac{(n-1)\cdots(n-k-2)}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}\int_0^1 x^{n+k-1}(1-x)^{n-k-1}dx \text{ récurrence à rédiger} \\
&= \frac{(n-1)\cdots 1}{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)} = \frac{(n-1)!.(n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{1}{n\binom{2n-1}{n}}
\end{aligned}$$

8) $x \in]-\infty, 0[$ est solution de $f_n(x) = 0$ si et seulement si $h_n(x) = \dfrac{1}{n\binom{2n-1}{n}} > 0$

En utilisant les variations de h_n vues au 6) on en déduit que :
Si n est impair $f_n(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 0[$ donc pas de solution sur $\mathbb{R}$
Si n est pair $f_n(x) = 0$ a une solution et une seule sur $]-\infty, 0[$ donc une solution et une seule sur $\mathbb{R}$

9) $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} z^k$ d'après 4) .

Par l'absurde :supposons $|z| \geq 1$ et $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} z^k$. On a donc :

$$f_n(z) = \binom{2n-2}{n-1} z^{n-1}\left(1 + \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{z^{k-n+1}}\right)$$

soit $B = \dfrac{1}{\binom{2n-2}{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+k-1}{k}\dfrac{1}{z^{k-n+1}}$, $|B| \leq \dfrac{1}{\binom{2n-2}{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n+k-1}{k}$

Or d'après la formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$ donc $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}$

$$|B| \leq \frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1}\right) = \frac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n-2}{n-1}} = \frac{\frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!}}{\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}} = \frac{(n-1)!(n-1)!}{n!(n-2)!} = \frac{n-1}{n} < 1$$

donc $1 + B$ ne s'annule pas et si $|z| \geq 1$, $f_n(z) \neq 0$.

$\boxed{\text{donc toutes les racines complexes de } f_n(z) = 0 \text{ sont de modules strictement inférieurs à } 1}$