Pour tout nombre entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction J_n de la variable réelle x par :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,dt \ .$$

(on ne cherchera pas à calculer cette intégrale)

PARTIE I

I.1 Montrer que J_n est définie sur $\mathbb{R}$, paire si n est pair et impaire si n est impair.

I.2 Exprimer $J_{-n}(x)$ en fonction de $J_n(x)$.
On supposera dorénavant que n est un nombre entier positif ou nul.

I.3 Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I.4 Montrer que l'on a $J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t.[(n - x\cos t)\cos(nt - x\sin t)]\,dt$.

En déduire que J_n est solution de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_n) \qquad x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \ .$$

PARTIE II

II.1 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$J_{2p}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 2pt.\cos(x\sin t)\,dt \ ,$$

$$J_{2p+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2p+1)t.\sin(x\sin t)\,dt \ .$$

II.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n(x)$ est développable en série entière de x sur $\mathbb{R}$ tout entier (on utilisera les développements en série entière des fonctions cosinus ou sinus, selon la parité de n).

II.3 Soit p un nombre entier naturel.

II.3.1 Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} \cos 2pt.\sin^{2k} t.dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k} t$ comme combinaison linéaire des $\cos 2qt$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \le k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \le k < p$. Calculer l'intégrale si $k \geq p$

En déduire les coefficients $\alpha_{2k}(p)$ du développement en série entière $J_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k}(p)x^{2k}$ de J_{2p} sur $\mathbb{R}$.

II.3.2 Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} \sin(2p+1)t.\sin^{2k+1} t.dt$ pour tout nombre entier k supérieur ou égal à p (on pourra exprimer $\sin^{2k+1} t$ comme combinaison linéaire des $\sin(2q+1)t$, avec $q \in \mathbb{N}$ et $q \le k$). Lorsque $p > 0$, montrer que cette intégrale est nulle pour tout nombre entier k tel que $0 \le k < p$.

En déduire les coefficients $\alpha_{2k+1}(p)$ du développement en série entière $J_{2p+1}(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_{2k+1}(p)x^{2k+1}$ de J_{2p+1} sur $\mathbb{R}$.

II.4

II.4.1 On fixe $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction des valeurs des $J_n(x)$ les coefficients de Fourier des fonctions $\cos(x \sin t)$ et $\sin(x \sin t)$ de la variable t . Ces deux fonctions sont-elles égales à la somme de leurs séries de Fourier ?

II.4.2 En déduire la valeur des sommes $J_0(x)+2\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p J_{2p}(x)$, $J_0(x)+2\sum_{p=1}^{+\infty}J_{2p}(x)$, $\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p J_{2p+1}(x)$ et $J_0(x)^2+2\sum_{n=1}^{+\infty}J_n(x)^2$.

PARTIE III

On considère l'équation différentielle linéaire homogène :

$$(B_\lambda) \quad x^2y''+xy'+\left(x^2-\lambda^2\right)y=0 \ .$$

où λ est un nombre réel donné.

III.1

III.1.1 Montrer que, pour que $x^\lambda z(x)$ soit solution de (B_λ) sur $]0, +\infty[$, il faut et il suffit que z soit solution de l'équation :

$$(B'_\lambda) \quad xz''+(2\lambda+1)z'+xz=0 \ .$$

III.1.2 Dans le cas où $\lambda=-\frac{1}{2}$, déterminer la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$, et en déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

III.1.3 En déduire la solution générale de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ lorsque $\lambda=\frac{1}{2}$.

On se propose à présent de chercher les solutions de (B_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $y(x)=x^\lambda z(x)$, où $z(x)$ est la somme d'une série entière.

III.2 On cherche les solutions de (B'_λ) sur $]0, +\infty[$ de la forme $z(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k$.

III.2.1 Etablir la relation qui doit exister pour tout $k \geq 1$ entre a_{k+1} et a_{k-1} pour que z soit solution de (B'_λ) .

On suppose dorénavant que λ n'est pas un entier strictement négatif.

III.2.2 Montrer qu'il existe une unique solution z_λ de (B'_λ) de la forme $z_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p}(\lambda) x^{2p}$, et telle que $a_0(\lambda) = 1$. Calculer $a_{2p}(\lambda)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2p}(\lambda) x^{2p}$?

III.3 On définit sur $]0, +\infty[$ la fonction j_λ par $j_\lambda(x) = x^\lambda z_\lambda(x)$.

III.3.1 On suppose que λ n'est pas un nombre entier.

Montrer que les fonctions j_λ et $j_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.

En déduire la solution générale de (B_λ) sur $]0, +\infty[$.

III.3.2 Soit n un nombre entier strictement positif.

Comparer j_n à la fonction J_n définie au début du problème.

Vérifier que la fonction z_{-n} définie par $z_{-n}(x) = x^{2n} z_n(x)$ est solution de l'équation (B'_{-n}).