CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2002

Filières PC, PSI

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

Dans tout le problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n supérieur ou égal à deux. On note $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On note $M_n(K)$, où K est un corps, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K, $M_{n,1}(K)$ l'ensemble des vecteurs colonnes de n éléments de K, et $GL_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans K. On note I_n l'élément unité de $M_n(K)$.

On admettra que si deux matrices A et C de $M_n(K)$ sont données sous la forme $A=\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ et

$C=\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{pmatrix}$ (écriture par blocs) avec $A_{1,1}$ et $C_{1,1}$ de $M_p(K)$, $A_{1,2}$ et $C_{1,2}$ à n-p colonnes et p lignes, $A_{2,1}$ et $C_{2,1}$ à p colonnes et n-p lignes, et $A_{2,2}$ et $C_{2,2}$ de $M_{n-p}(K)$, alors le produit

$$AC=\begin{pmatrix} A_{1,1}C_{1,1}+A_{1,2}C_{2,1} & A_{1,1}C_{1,2}+A_{1,2}C_{2,2} \\ A_{2,1}C_{1,1}+A_{2,2}C_{2,1} & A_{2,1}C_{1,2}+A_{2,2}C_{2,2} \end{pmatrix}$$

Pour $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ de $M_{n,1}(\mathbb{C})$, on note également $N_\infty(X)=\max_j |x_j|$.

On désigne par S_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_n=\{1,2,\dots,n\}$.(ensemble des bijections de $\mathbb{N}_n$ dans lui-même), et Id l'application identité de $\mathbb{N}_n$. On notera, pour s et s' de S_n, ss' au lieu de sos', la composée de ces deux bijections.

Partie 1

Pour σ de S_n, on appelle u_σ l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall j\in\mathbb{N}_n,\ u_\sigma(e_j)=e_{\sigma(j)}.$$

On note $P_\sigma=(p_{i,j})$ la matrice de cet endomorphisme dans la base B.

1) a) Pour σ de S_n, expliciter les $p_{i,j}$; donner en particulier P_{Id} ; pour σ et σ' de S_n déterminer $P_{\sigma\sigma'}$.

b) Déduire de ce qui précède que l'application φ de S_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui à σ associe P_σ est bien définie et que c'est un morphisme de groupes. Que vaut $(P_\sigma)^{-1}$?

c) Calculer ${}^tP_\sigma$ et en déduire que P_σ est une matrice orthogonale.

Tournez la page S.V.P.

2) On considère un endomorphisme v de E, dont la matrice dans B est $A=(a_{i,j})$, et σ de S_n. Calculer $u_\sigma^{-1} o v o u_\sigma(e_j)$. En déduire que si $A=(a_{i,j})$ est élément de $M_n(\mathbb{R})$, ${}^tP_\sigma A P_\sigma$ est la matrice de terme général $a_{\sigma(i)\sigma(j)}$.

On dit que l'élément $A=(a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ est réductible s'il existe σ de S_n telle que ${}^tP_\sigma A P_\sigma$ soit de la forme

$$A'=\begin{pmatrix} U & V \\ (0) & W \end{pmatrix} \text{ (écriture par blocs).}$$

3) a) Donner un exemple non trivial de matrice réductible. Montrer que si, pour tout couple (i,j), $a_{i,j}\neq 0$, alors A est irréductible.

b) On se place dans le cas n=2. Montrer que A est irréductible si et seulement si $a_{1,2}a_{2,1}\neq 0$. (On pourra examiner les éléments de S_2) . La réciproque de la question a) est-elle vraie ?

c) On revient au cas général ; montrer que si A est réductible, alors pour tout p entier naturel non nul, A^p est réductible. En déduire que s'il existe p entier naturel non nul tel que tous les coefficients de A^p soient non nuls, alors A est irréductible. Appliquer ce qui précède pour déterminer si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est irréductible. La matrice $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle irréductible ? Que peut-on en conclure ?

4) a) On suppose qu'il existe (I,J) partition de $\mathbb{N}_n$ telle que $\forall (i,j)\in I\times J,\ a_{i,j}=0$. On note p le cardinal de I. En utilisant une permutation σ de $\mathbb{N}_n$ telle que $\sigma(\mathbb{N}_p)=I$, montrer que A est réductible.

b) Réciproquement on suppose que A est réductible, et ${}^tP_\sigma A P_\sigma = A'=\begin{pmatrix} U & V \\ (0) & W \end{pmatrix}$. Exhiber une partition (I,J) de $\mathbb{N}_n$ telle que : $\forall (i,j)\in I\times J,\ a_{i,j}=0$.

c) Déduire des questions précédentes que A, matrice dans B de l'endomorphisme v, est réductible si et seulement si il existe une partie L de $\mathbb{N}_n$ non vide et distincte de $\mathbb{N}_n$ telle que $\mathrm{vect}(e_k, k\in L)$ (espace engendré par les e_k) soit stable par v.

Partie 2

1) On considère $A=(a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{R})$ comme un élément de $M_n(\mathbb{C})$ et on note Sp(A) l'ensemble des complexes λ tels que $A-\lambda I_n$ ne soit pas inversible (ensemble des valeurs propres de A). Pour k fixé, on note $\Lambda_k=\sum_{j\neq k}|a_{k,j}|$, et $D_k=\{z\in\mathbb{C}, |z-a_{k,k}|\leq \Lambda_k\}$ (disque fermé du plan complexe, de centre $a_{k,k}$ et de rayon Λ_k), et $C_k=\{z\in\mathbb{C}, |z-a_{k,k}|=\Lambda_k\}$ (cercle). Soit λ de Sp(A). En considérant $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ non nul de $M_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX=\lambda X$ (c'est-à-dire X vecteur propre de A) et k tel que $|x_k| = N_\infty(X)$, montrer que $\lambda \in \bigcup_{j=1}^{n} D_j$.

2) On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ (-1) & 5 & 3 \\ 5 & 4 & (-1) \end{pmatrix}$. Montrer que Sp(A)=Sp(${}^tA$). En déduire en appliquant le 1) une zone de localisation dans le plan complexe des éléments de Sp(A). On fera un dessin.

3) On suppose dans cette question que A est irréductible, et que tout disque ouvert de centre λ rencontre le complémentaire de $\bigcup_{k=1}^{n} D_k$.

a) Montrer que $\forall k, |\lambda - a_{k,k}| \geq \Lambda_k$.

b) Soit X vecteur propre de A et k tel que $|x_k| = N_\infty(X)$, montrer que $\Lambda_k = |\lambda - a_{k,k}|$.

c) On considère alors $I = \{i\,; |x_i| = N_\infty(X)\}$; établir que pour tout i de I,
$\sum_{j \neq i} |a_{i,j}|(N_\infty(X) - |x_j|) \leq 0$.
En déduire que pour tout i de I, et tout j du complémentaire de I, $a_{i,j}$=0.

d) Que se passe-t-il si le complémentaire de I est non vide ? En déduire que λ appartient à l'intersection des C_k.

Partie 3

Avec les notations de la Partie 2, on dit que A est à diagonale fortement dominante (respectivement strictement dominante) si : $\forall k, |a_{k,k}| \geq \Lambda_k$, et $\exists j, |a_{j,j}| > \Lambda_j$ (respectivement : $\forall k, |a_{k,k}| > \Lambda_k$)

1) Montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible. (penser noyau d'endomorphisme).

2) On suppose que A est à diagonale fortement dominante, et irréductible.

a) Montrer que pour tout k, 0 n'est pas un point intérieur à D_k.

b) Si 0 est élément de Sp(A), montrer en utilisant la question 3), Partie 2, qu'on aboutit à une contradiction. Conclusion ?

3) En utilisant la question précédente et la Partie 2, prouver que si A est à diagonale fortement dominante et irréductible, ou à diagonale strictement dominante, et si tous ses coefficients diagonaux sont strictement positifs, alors tous les éléments de Sp(A) ont une partie réelle strictement positive ; en déduire det(A)>0.

4) On garde les hypothèses de la question 3), et on suppose de plus que A est symétrique. Montrer que Sp(A) est contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique et à valeurs propres strictement positives; que peut-on en conclure ?

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE. — D'après documents fournis.