CONCOURS ESIM Entrepreneur Industrie - Session 2003

Filière MP

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I (algèbre)

Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

$M_n(\mathfrak{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
$O(n)$ désigne le groupe orthogonal d'ordre n et f_n l'application de $M_n(\mathfrak{R})$ dans $\mathfrak{R}$ définie par :
$\forall M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathfrak{R}),\ f_n(M) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} m_{ij}$.

On désigne par $\|\ \|$ la norme définie sur $M_n(\mathfrak{R})$ par $\|M\| = \underset{1\leq i,j\leq n}{\text{Max}} |m_{ij}|$.

$(d_1,d_2,\ldots,d_k,\ldots d_n)$ étant un élément de $\mathfrak{R}^n$, on désigne par $\text{Diag}(d_k)$ la matrice diagonale dont la diagonale est $(d_1,d_2,\ldots,d_k,\ldots d_n)$.

Résultats préliminaires :

1) Démontrer que f_n est une forme linéaire sur $M_n(\mathfrak{R})$.
Est-elle continue ?

2) a) Démontrer que : $\forall M \in O(n), \|M\| \leq 1$.
   b) Montrer que $O(n)$ est un fermé dans l'espace vectoriel normé $(M_n(\mathfrak{R}),\|\ \|)$.

3) Justifier l'existence d'une matrice A_n appartenant à $O(n)$ telle que :
$\forall M \in O(n),\ f_n(M) \leq f_n(A_n)$.

Le but du problème est de déterminer un équivalent de $f_n(A_n)$ quand n tend vers l'infini.

I) Dans cette partie n est fixé.
On désigne par $A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn}$ les colonnes de la matrice A_n et on note :
$A_n = [A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{nn}]$.
On fixe deux indices i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$, et on désigne par B_n la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont égales à $B_{n1}, B_{n2}, \ldots B_{nn}$, avec :
$B_{nk} = A_{nk}$ si k est différent de i et j
$B_{ni} = (\cos(t))A_{ni} - (\sin(t))A_{nj}$
$B_{nj} = (\sin(t))A_{ni} + (\cos(t))A_{nj}$.

1) Démontrer que la matrice B_n appartient à $O(n)$.

2) Déterminer deux réels λ et μ tels que :
$f_n(A_n) - f_n(B_n) = \lambda(1-\cos(t)) + \mu\sin(t)$.

3) En considérant un équivalent de l'expression précédente quand t tend vers 0, démontrer que $\mu = 0$.

En déduire que $\sum_{k=1}^{i} a_{kj} = \sum_{k=1}^{j} a_{ki}$.

Pour toute la suite du problème, le nombre réel précédent est noté σ_{ij}.

II) On désigne par C_n la matrice carrée d'ordre n telle que :
$c_{ij} = 0$ si $j>i$, $c_{ij} = 1$ si $j\leq i$.

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 1 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & . & 1 & 1 & 0 \\ 1 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} .$$

On désigne par J_n la matrice carrée d'ordre n dont la sous-diagonale est formée de 1 et tous les autres coefficients sont nuls.

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

1) a) Exprimer C_n sous la forme d'un polynôme en J_n.

b) Montrer que C_n est inversible et que $(C_n)^{-1} = I_n - J_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

2) a) Montrer que pour tout $M \in M_n(\Re)$, $f_n(M) = \mathrm{Trace}(C_nM)$.

b) Montrer que $C_nA_n = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.
En déduire que C_nA_n est une matrice symétrique.

3) On pose $U_n = {}^t((C_n)^{-1})A_n$.
a) Démontrer que la matrice U_n est symétrique.

b) Montrer que $f_n(A_n) = \mathrm{Trace}((U_n)^{-1})$.

4) On pose $V_n = (U_n)^2$. Montrer que V_n est la matrice carrée d'ordre n telle que :
la diagonale est formée de 2, sauf le dernier élément qui est égal à 1, la sur-diagonale et la sous-diagonale sont formées de -1 et les autres coefficients sont nuls.

$$V_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & . & . & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

III) 1) On désigne par P_n le polynôme caractéristique de V_n.
On pose $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = 1 - X$ pour tout X réel.
Montrer que : $P_n(X) = (2 - X)P_{n-1}(X) - P_{n-2}(X)$, pour tout X réel et tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.

2) On pose $x = 4\sin^2\theta$. Montrer que $P_n(x) = \dfrac{\cos(2n+1)\theta}{\cos(\theta)}$.

3) En déduire les zéros du polynôme P_n, puis les valeurs absolues des valeurs propres de la matrice $(U_n)^{-1}$.

4) a) Justifier que $(U_n)^{-1}$ est diagonalisable et que $(U_n)^{-1} = PDP^{-1}$ où P est une matrice orthogonale et $D = \mathrm{Diag}(d_k)$.

b) On suppose que certains d_k sont négatifs.
Soit $D' = \mathrm{diag}(|d_k|)$. On définit une matrice A' par $C_nA' = PD'P^{-1}$.
i) Vérifier que Trace $(C_nA') >$ Trace (C_nA_n).
ii) Montrer que A' est orthogonale.
iii) Conclure.

5) En déduire que $f_n(A_n) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\sin\left(\frac{2k+1}{2n+1}\frac{\pi}{2}\right)}$.

IV) On pose $\phi(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}$ et $h = \dfrac{\pi}{2(2n+1)}$.

1) Montrer que $2f_n(A_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\phi((2k+1)h)$.

2) Montrer que :
$$\int_h^{(2n+1)h}\phi(t)dt \leq 4hf_n(A_n) \leq 2h\phi(h) + \int_h^{(2n-1)h}\phi(t)dt .$$

3) Déterminer un équivalent quand h tend vers 0 de $\displaystyle\int_h^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin(t)}$.

4) Déterminer un équivalent de $f_n(A_n)$ quand n tend vers l'infini.

__________ Fin de l'énoncé __________