Exercice 2 /3

On considère une suite bornée $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes.

1°. Démontrer la convergence de la série de terme général $\dfrac{a_n}{n\,(n+1)}$.

2°. Démontrer la relation suivante, où les entiers p et q vérifient $0 < p < q$:

$$\sum_{n=p}^{q} \frac{1}{n\,(n+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q+1}.$$

En déduire la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(n+1)}$ où n décrit $\mathbb{N}^*$.

3°. Dans cette question uniquement, on pose $a_n = x^n$ pour $n \geqslant 1$.

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\dfrac{x^n}{n\,(n+1)}$.

(b) Comparer la somme de cette série à l'application $x \mapsto \dfrac{x + (1-x)\ln(1-x)}{x}$.

(c) Calculer par passage à la limite la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,(n+1)}$.

4°. Démontrer que la suite $(k\,R_k)_{k\geqslant 1}$ où $R_k = \displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n\,(n+1)}$ est bornée.

5°. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n est absolument convergente.

(a) Démontrer l'absolue convergence de la série de terme général R_k.

(b) Démontrer par inversion de sommations l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left[k \sum_{n=k}^{N} \frac{a_n}{n\,(n+1)} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n$ pour tout entier N supérieur ou égal à 1.

(c) Démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \left[k \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{a_n}{n\,(n+1)} \right] = \frac{1}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{N\,(N+1)\,a_n}{n\,(n+1)}$ pour tout entier N supérieur ou égal à 1.

(d) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\,R_k$ en fonction de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.