ESIEE Amiens 1996 problème 2

Préliminaire:

Posons $Y = MX$.On a $\forall i \in [[1,n]], y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}x_j$ donc $\forall i \in [[1,n]], |y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \|X\| \leq \| |M| \| \|X\|$ .La relation étant vraie pour tout i elle est vraie pour le maximum :

$$\boxed{\|MX\| < \||M\||.\|X\|}$$

1. PARTIE

1. a)par hypothèse D est une matrice diagonale, les termes sur la diagonale étant non nuls , en effet vue l'hypothèse sur A tous les termes diagonaux ont une valeur absolue strictement positive.

   b)Soit $J = D^{-1}(E+F)$ de coefficients $p_{i,j}$ on a:

$$\forall i \in [[1,n]], \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} d_{i,i}^{-1}(e_{i,j} + f_{i,j}) = -a_{i,i}^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{i,j}$$

   donc:

$$\forall i \in [[1,n]], \left| \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} \right| \leq |a_{i,i}|^{-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{i,i}| < |a_{i,i}|^{-1} |a_{i,i}| = 1$$

   La dernière inégalité découlant du fait que A est à diagonale strictement dominante. La propriété est vraie pour tout i elle est vraie pour le maximum :

$$\boxed{\||J\|| < 1}$$

2. a)On a $A = D - E - F$ donc $AY = 0 \Longleftrightarrow DY = (E+F)Y$ et comme D est inversible $AY = 0 \Longleftrightarrow Y = JY$

   b)On raisonne par l'absurde: Si $Y \neq 0$ vérifie $Y = JY$ alors en prenant les normes des deux membres et en utilisant le préliminaire et la première question on a

$$\|Y\| = \|JY\| \leq \||J\||.\|Y\| < \|Y\|$$

   ce qui est absurde. L'équation $Y = JY$ n'a pas de solution non nulle , et comme $Y = 0$ est solution évidente :

   $AY = 0 \Longleftrightarrow Y = JY \Longleftrightarrow Y = 0$.Le noyau de A est réduit à 0.

$$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

3. a)On a $X^{(k+1)} - \Lambda = JX^{(k)} + D^{-1}B - \Lambda$.On veut donc prouver $D^{-1}B - \Lambda = -J\Lambda$.

   Or $-J\Lambda = -D^{-1}(E+F)\Lambda = -D^{-1}(D-A)\Lambda = -\Lambda + D^{-1}A\Lambda = -\Lambda + D^{-1}B$.En utilisant la définition de J ,celles de D, E, F et enfin que Λ est solution du système $AX = B$.

   b)On a donc $\left\|X^{(k+1)} - \Lambda\right\| = \left\|J(X^{(k)} - \Lambda)\right\| \leq \||J\||.\left\|X^{(k)} - \Lambda\right\|$.La majoration est géométrique donc $\left\|X^{(k)} - \Lambda\right\| \leq \||J\||^k \left\|X^{(k)} - \Lambda\right\| \to_{k\to\infty} 0$ car $\||J\|| < 1$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty}(X^{(k)}) = B}$$

2. PARTIE

On recommence avec des hypothèses un peu différentes.

1. $D - E$ est une matrice triangulaire ayant la même diagonale que D.Donc tous les termes diagonaux sont non nuls. $D - E$ est inversible et donc $\boxed{L = (D-E)^{-1}F \text{ est définie}}$

2. a)On écrit que $Y = LX \Longleftrightarrow (D-E)Y = FX \Leftrightarrow DY = EY + FX$.Donc avec la définition des matrices:

$$a_{i,i}y_i = -\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}y_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j\right)$$

   La division par $a_{i,i}$ non nul donne alors la formule demandée:

$$y_i = -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}y_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j\right)$$

b) Le résultat demandé est faux si $X = 0$ car alors $Y = 0$. On suppose dans $X \neq 0$

on a $y_1 = -\frac{1}{a_{1,1}}\left(\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_j\right)$.Et donc $|y_1| \leq \left|\frac{1}{a_{1,1}}\right| \left(\sum_{j=2}^{n} |a_{1,j}| \, |x_j|\right) \leq \left|\frac{1}{a_{1,1}}\right| \left(\sum_{j=2}^{n} |a_{1,j}| \, \|X\|\right)$.Et comme $\sum_{j=2}^{n} |a_{1,j}| < |a_{1,1}|$ et $\|X\| > 0$ on vérifie bien:

$$|y_1| < \|X\|$$

Montrons par récurrence:$H_i : |y_i| < \|X\|$.

La propriété est vrai pour $i = 1$ d'après la sous question précédente.

Supposons qu'elle soit vraie pour tout $j < i$ et montrons qu'elle est vraie pour i:On a alors $|y_i| \leq \left|\frac{1}{a_{i,i}}\right| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \, |y_j| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}| \, |x_j|$.Dans la première somme on majore $|y_j|$ par $\|X\|$ d'après l'hypothèse de récurrence;dans la seconde on majore $|x_j|$ par $\|X\|$par définition de la norme. Donc

$$|y_i| \leq \left|\frac{1}{a_{i,i}}\right| \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \, \|X\| < \|X\|$$

toujours avec les hypothèses sur les coefficients diagonaux de A et $X \neq 0$

L'inégalité est donc vraie pour tous les coefficients de Y donc pour le maximum :

$$\boxed{\|Y\| < \|X\|}$$

3. a)i_0 existe car un maximum est toujours dans l'ensemble. Donc $|||L|||$ est atteint pour un certain indice.

   b)posons $Y_0 = LX_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.on a:$\begin{cases} i \neq i_0 \Rightarrow |y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |l_{i,j}| \leq |||L||| \\ i = i_0 \Rightarrow |y_i| = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j l_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} |l_{i,j}| = |||L||| \end{cases}$

   Ceci par définition des coefficients ε puis de l'indice i_0.La plus grande coordonnée est donc $|||L|||$ et $\|Y_0\| = |||L|||$

   c)On applique le a) on a donc $\|Y_0\| = |||L||| < \|X_0\|$ et comme $\|X_0\| = 1$:

$$\boxed{|||L||| < 1}$$

4. a)On a $Y^{(k+1)} - \Lambda = LY^{(k)} + (D - E)^{-1}B - \Lambda$.Pour prouver l'égalité demandée il suffit donc de prouver

$$(D - E)^{-1}B - \Lambda = L\Lambda$$

or $B = A\Lambda = (D - E - F)\Lambda$.donc $(D - E)^{-1}B - \Lambda = (D - E)^{-1}(D - E - F)\Lambda - \Lambda = (I_n - L)\Lambda$.La relation est donc vérifiée.

b) on termine sans problème en reprenant la fin de la première partie.