Préliminaire:

Posons $Y = MX$.On a $\forall i \in [[1,n]], y_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j}x_j$ donc $\forall i \in [[1,n]], |y_i| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| |x_j| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| \|X\| \leq |||M||| \|X\|$ .La relation étant vraie pour tout i elle est vraie pour le maximum :

$$\boxed{\|MX\| < |||M|||.\|X\|}$$

1. PARTIE

1. a)par hypothèse D est une matrice diagonale, les termes sur la diagonale étant non nuls , en effet vue l'hypothèse sur A tous les termes diagonaux ont une valeur absolue strictement positive.

   b)Soit $J = D^{-1}(E+F)$ de coefficients $p_{i,j}$ on a:

   $$\forall i \in [[1,n]], \sum_{j=1}^n p_{i,j} = \sum_{j=1}^n d_{i,i}^{-1}(e_{i,j}+f_{i,j}) = -a_{i,i}^{-1}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n a_{i,j}$$

   donc:

   $$\forall i \in [[1,n]], \left|\sum_{j=1}^n p_{i,j}\right| \leq |a_{i,i}|^{-1}\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n |a_{i,i}| < |a_{i,i}|^{-1}|a_{i,i}| = 1$$

   La dernière inégalité découlant du fait que A est à diagonale strictement dominante. La propriété est vraie pour tout i elle est vraie pour le maximum :

   $$\boxed{|||J||| < 1}$$

2. a)On a $A = D - E - F$ donc $AY = 0 \Longleftrightarrow DY = (E+F)Y$ et comme D est inversible $AY = 0 \Longleftrightarrow Y = JY$

   b)On raisonne par l'absurde: Si $Y \neq 0$ vérifie $Y = JY$ alors en prenant les normes des deux membres et en utilisant le préliminaire et la première question on a

   $$\|Y\| = \|JY\| \leq |||J|||.\|Y\| < \|Y\|$$

   ce qui est absurde. L'équation $Y = JY$ n'a pas de solution non nulle , et comme $Y = 0$ est solution évidente :

   $AY = 0 \Longleftrightarrow Y = JY \Longleftrightarrow Y = 0$.Le noyau de A est réduit à 0.

   $$\boxed{A \text{ est inversible}}$$

3. a)On a $X^{(k+1)} - \Lambda = JX^{(k)} + D^{-1}B - \Lambda$.On veut donc prouver $D^{-1}B - \Lambda = -J\Lambda$.

   Or $-J\Lambda = -D^{-1}(E+F)\Lambda = -D^{-1}(D-A)\Lambda = -\Lambda + D^{-1}A\Lambda = -\Lambda + D^{-1}B$.En utilisant la définition de J ,celles de D, E, F et enfin que Λ est solution du système $AX = B$.

   b)On a donc $\left\|X^{(k+1)} - \Lambda\right\| = \left\|J(X^{(k)} - \Lambda)\right\| \leq |||J|||.\left\|X^{(k)} - \Lambda\right\|$.La majoration est géométrique donc $\left\|X^{(k)} - \Lambda\right\| \leq |||J|||^k \left\|X^{(k)} - \Lambda\right\| \to_{k\to\infty} 0$ car $|||J||| < 1$

   $$\boxed{\lim_{k\to\infty}(X^{(k)}) = B}$$

2. PARTIE

On recommence avec des hypothèses un peu différentes.

1. $D - E$ est une matrice triangulaire ayant la même diagonale que D.Donc tous les termes diagonaux sont non nuls. $D - E$ est inversible et donc $\boxed{L = (D-E)^{-1}F \text{ est définie}}$

2. a)On écrit que $Y = LX \Longleftrightarrow (D-E)Y = FX \Leftrightarrow DY = EY + FX$.Donc avec la définition des matrices:

   $$a_{i,i}y_i = -\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}y_j + \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j\right)$$

   La division par $a_{i,i}$ non nul donne alors la formule demandée:

   $$y_i = -\frac{1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}y_j + \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}x_j\right)$$

b) Le résultat demandé est faux si $X=0$ car alors $Y=0$. On suppose dans $X\neq 0$

on a $y_1=-\frac{1}{a_{1,1}}\left(\sum_{j=2}^{n}a_{1,j}x_j\right)$.Et donc $|y_1|\leq\left|\frac{1}{a_{1,1}}\right|\left(\sum_{j=2}^{n}|a_{1,j}|\,|x_j|\right)\leq\left|\frac{1}{a_{1,1}}\right|\left(\sum_{j=2}^{n}|a_{1,j}|\,\|X\|\right)$.Et comme $\sum_{j=2}^{n}|a_{1,j}|<|a_{1,1}|$ et $\|X\|>0$ on vérifie bien:

$$|y_1|<\|X\|$$

Montrons par récurrence:$H_i:|y_i|<\|X\|$.

La propriété est vrai pour $i=1$ d'après la sous question précédente.

Supposons qu'elle soit vraie pour tout $j<i$ et montrons qu'elle est vraie pour i:On a alors

$|y_i|\leq\left|\frac{1}{a_{i,i}}\right|\sum_{j=1}^{i-1}|a_{i,j}|\,|y_j|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{i,j}|\,|x_j|$.Dans la première somme on majore $|y_j|$ par $\|X\|$ d'après l'hypothèse de récurrence;dans la seconde on majore $|x_j|$ par $\|X\|$par définition de la norme. Donc

$$|y_i|\leq\left|\frac{1}{a_{i,i}}\right|\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{i,j}|\,\|X\|<\|X\|$$

toujours avec les hypothèses sur les coefficients diagonaux de A et $X\neq 0$

L'inégalité est donc vraie pour tous les coefficients de Y donc pour le maximum :

$$\boxed{\|Y\|<\|X\|}$$

3. a)i_0 existe car un maximum est toujours dans l'ensemble. Donc $|||L|||$ est atteint pour un certain indice.

b)posons $Y_0=LX_0=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$.on a:$\begin{cases}i\neq i_0\Rightarrow|y_i|\leq\sum_{j=1}^{n}|l_{i,j}|\leq|||L|||\\ i=i_0\Rightarrow|y_i|=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j l_{i,j}=\sum_{j=1}^{n}|l_{i,j}|=|||L|||\end{cases}$

Ceci par définition des coefficients ε puis de l'indice i_0.La plus grande coordonnée est donc $|||L|||$ et $\|Y_0\|=|||L|||$

c)On applique le a) on a donc $\|Y_0\|=|||L|||<\|X_0\|$ et comme $\|X_0\|=1$:

$$\boxed{|||L|||<1}$$

4. a)On a $Y^{(k+1)}-\Lambda=LY^{(k)}+(D-E)^{-1}B-\Lambda$.Pour prouver l'égalité demandée il suffit donc de prouver

$$(D-E)^{-1}B-\Lambda=L\Lambda$$

or $B=A\Lambda=(D-E-F)\Lambda$.donc $(D-E)^{-1}B-\Lambda=(D-E)^{-1}(D-E-F)\Lambda-\Lambda=(I_n-L)\Lambda$.La relation est donc vérifiée.

b) on termine sans problème en reprenant la fin de la première partie.