MINES PONT 96

I1)

a) Le tableau de variations de $f(t) = t.e^{-t}$, vu $f'(t) = (1-t).e^{-t}$, est le suivant:

$$\begin{array}{cccccccc} t & -\infty & & 0 & & 1 & & +\infty \\ f' & & + & 1 & + & 0 & - & \\ f & -\infty & \nearrow & 0 & \nearrow & 1/e & \searrow & 0 \end{array}$$

On en déduit la discussion suivant $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ par bijection monotone sur chaque intervalle de monotonie , la fonction étant continue :

- si $\lambda > 1/e$: pas de solution à l'équation $f(t) = \lambda$;
- si $\lambda = 1/e$: une et une seule solution $\alpha = 1$ ($> \lambda$) ;
- si $0 < \lambda < 1/e$: deux solutions (positives) $\alpha < 1 < \beta$. Pour placer λ on étudie $f(\lambda) = \lambda e^{-\lambda} < \lambda$, donc d'après le tableau de variation $\lambda < \alpha$ ou $\lambda > \beta$. Or $\lambda < 1$ donc $\boxed{\lambda < \alpha < 1 < \beta}$.

b)

- La fonction $g\ :\ t \to \lambda.e^t$ est strictement croissante ($\lambda > 0$) la suite (u_n) est donc monotone.
- De plus, comme la fonction g est continue, la suite ne peut converger que vers un point fixe de g , à savoir α (ou β si $\lambda \leq 1/e$).
- Enfin, le sens de variations de la suite (u_n) est donné par le signe de $g(u_0) - u_0 = \lambda e^{u_0} - u_0 = e^{-u_0}(\lambda - f(u_0))$, c'est le même que celui de $\lambda - f(u_0)$, donné par le tableau de variations du a) . D'où la discussion:
  - Si $\lambda > 1/e$ la suite (u_n) est croissante et il n'y a pas de point fixe : la suite divergente (vers $+\infty$).
  - Si $\lambda = 1/e$, la suite (u_n) est croissante, 1 est le seul point fixe, et $]-\infty, 1]$ est un intervalle stable par g . Donc:
    - si $u_0 > 1$ la suite est strictement croissante divergente (vers $+\infty$);
    - si $u_0 = 1$ la suite est constante (et convergente) de valeur 1 ;
    - si $u_0 < 1$ la suite est croissante et majorée, donc converge vers la seule limite possible 1 .
  - Si $\lambda < 1/e$ il y a deux points fixes α et β pour g , les intervalles $]-\infty, \alpha], [\alpha, \beta], [\beta, +\infty[$ sont stables par g , (u_n) y étant respectivement croissante, décroissante et croissante. Donc:
    - \- si $u_0 > \beta$ la suite est strictement croissante divergente (vers $+\infty$);
    - \- si $u_0 = \beta$ ou $u_0 = \alpha$ la suite est constante (et convergente) de valeur β ou α respectivement;
    - \- si $\alpha < u_0 < \beta$ la suite est décroissante et minorée, donc converge vers le point fixe α ;
    - \- si $u_0 < \alpha$ la suite est croissante et majorée donc converge vers α .

c) La suite v_n est toujours > 0 , on a d'après la formule de Stirling

$$v_n \sim \frac{\lambda^n (l+n)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = (\lambda e)^n \left(1 + \frac{l}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

or $\ln\left(\left(1+\frac{l}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{l}{n}\right) \sim l$

$$v_n \sim \frac{\exp(l)}{\sqrt{2\pi n}} (\lambda e)^n << (\lambda e)^n$$

Comme $\lambda e < 1$, on a la suite à termes positifs (v_n) est négligeable devant le terme général d'une série à terme positif .

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge}}$$

on peut aussi utiliser le critère de d'Alembert la série étant à termes strictement positifs :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\lambda}{n+1}\left(\frac{\lambda+n+1}{\lambda+n}\right)^n (\lambda+n+1).$$

Or :

$$\left(\frac{\lambda+n+1}{\lambda+n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(\frac{\lambda+n+1}{\lambda+n}\right)\right) = \exp n \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda+n}\right)$$

et $\ln\left(1+\frac{1}{\lambda+n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{\lambda+n}$.On en déduit que $\lim\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \lambda e < 1$. Par d'Alembert, on a donc la convergence de la série $\forall \lambda \in]0, 1/e[$

I-2)

a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on démontre que " $f^{(n)}(x) = \lambda^n f(x+n)$ et que $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ " :

- si $n = 0$, $f(x) = f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- si $n = 1$, f est dérivable et $f'(x) = \lambda f(x+1)$ par définition de f et donc comme f est continue sur $\mathbb{R}$ f' est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$
- Si $f^{(n)}(x) = \lambda^n f(x+n)$ et que $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ alors comme f est dérivable $f^{(n)}$ l'est et

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \lambda^n f'(x+n) = \lambda^n (\lambda f(x+n+1)) = \lambda^{n+1} f(x+n+1)$$

On a donc $\forall n$, $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ donc $\boxed{f \in C\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ et } f^{(n)}(x) = \lambda^n f(x+n)}$

b) par l'absurde : si f est un polynôme de degré $d \neq 0$, alors f' est de degré $d-1$ et $f(x+1$ est de degré d : absurde

$$\boxed{\text{le seul polynôme est le polynôme nul}}$$

c) $f(x) = e^{ax}$ est dans $\mathcal{E}(\ \lambda)$ si et seulement si $ae^{ax} = \lambda . e^{a(x+1)}$, donc si et seulement si $\lambda = ae^{-a}$. D'où, d'après 1)a):
- si $\lambda > 1/e$, pas de fonctions;
- si $\lambda = 1/e$, une fonction, à savoir $f(x) = e^x$;
- si $\lambda < 1/e$, deux fonctions, $x \rightarrow e^{\alpha x}$ et $x \rightarrow e^{\beta x}$.

I-3)

a) P et Q sont continues dérivables par propriétés des parties réelles et imaginaires. Si $f \in \mathcal{E}(\ \lambda)$, on a pour tout x réel : $P'(x) + iQ'(x) = \lambda P(x+1) + i\lambda Q(x+1)$ et par unicité des parties réelles et imaginaires. $P'(x) = \lambda P(x+1)$ et $Q'(x) = \lambda Q(x+1)$ (en effet λ est réel)

$$\boxed{f \in \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow (P \in \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } Q \in \mathcal{E}(\lambda))}$$

b) si $g(x) = f(x-a)$

$$g'(x) = (f(x-a))' = f'(x-a) \ = \lambda f(x-a+1) = \lambda g(x+1)$$

c) L'application dérivation est linéaire donc par dérivation de **E**

$$f''(x) = \lambda f'(x+1)$$

$$\boxed{f \in \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow f' \in \mathcal{E}(\lambda)}$$

d) Soit, pour $f \in \mathcal{E}(\ \lambda)$, F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. **E** donne:$f(x) = \frac{f'(x-1)}{\lambda}$ car $\lambda \neq 0$. Si on intégre cette relation on obtient

$$\exists K \in \mathbb{C} \ , \forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) = \frac{f(x-1)}{\lambda} + K$$

F est alors dans $\mathcal{E}(\ \lambda)$ si et seulement si

$$F(x) = \lambda F'(x+1)$$

soit

$$\frac{f(x-1)}{\lambda} + K = \lambda \frac{f'(x)}{\lambda}$$

Ce qui équivaut à$K = 0$. On a donc une unique solution au problème

$$\boxed{F(x) = \frac{f(x-1)}{\lambda}}$$

I-4)

a1) Par composition g est continue dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $g'(x) = -f'(-x) = -f(-x+1)$, en appliquant **E** au point $-x$. On voit donc que $g'(x) = g(x+1)$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R} \quad -f(-x+1) = f(-x-1)$, soit encore comme $x- > t = (1-x)$ est bijective sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad -f(t) = f(t+2)$$

c'est à dire si et seulement si f vérifie **R** .

a2) La fonction nulle étant solution évidente on va chercher uniquement les fonctions non nulles :
De plus, les équations **R** et **E** impliquent, par dérivation de **E** :

$$f''(x) = \lambda^2 . f(x+2) = -\lambda^2 . f(x) \quad .$$

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme $f(x) = a.\cos(\ \lambda x) + b.\sin(\ \lambda x)$, avec a et b constantes complexes , l'une au moins étant non nul.
mais ce n'est pas une équivalence il faut vérifier :
Le calcul est direct est assez pénible , mais on peut remarquer que **R** implique que $f(t+4) = f(t)$ donc 4 est période de la fonction . Or

$$f(x+4) = a.\cos(\lambda x + 4\lambda) + b.\sin(\lambda x + 4\lambda)$$

4λ est donc une période de la fonction non nulle f :λ est un multiple de 2π donc $\lambda = K\frac{\pi}{2}$, $\in \mathbb{N}^*$ car $\lambda > 0$.
R donne alors:

$$\begin{aligned} f \text{ vérifie } \mathbf{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad a.\cos(\lambda x + K\pi) + b.\sin(\lambda x + K\pi) = -a.\cos(\lambda x) - b.\sin(\lambda x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (-1)^K a\cos(\lambda x) + (-1)^K a\sin(\lambda x) = -a.\cos(\lambda x) - b.\sin(\lambda x) \end{aligned}$$

donc K est impair : $\lambda = \pi/2 + k.\pi$, $k \in \mathbb{N}$
E donne alors **:**

$$\begin{aligned} f \text{ vérifie } \mathbf{E} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ -\lambda a\sin(\lambda x) + \lambda b\cos(\lambda x) = \lambda a\cos(\lambda x + \lambda) + \lambda b\sin(\lambda x + \lambda) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ -a\sin(\lambda x) + b\cos(\lambda x) = a\cos(\lambda x + \lambda) + b\sin(\lambda x + \lambda) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ -a\sin(\lambda x) + b\cos(\lambda x) = a(-1)^{k+1}\sin(\lambda x) + (-1)^k\cos(\lambda x) \end{aligned}$$

Donc k est pair.
Conclusion,

$$\boxed{\begin{cases} \text{si } \lambda \neq \pi/2[2\pi] \text{ alors } f = 0 \text{ est la seule solution} \\ \text{si } \lambda = \pi/2[2\pi] \text{ alors } f \in Vect(x- > \cos(\lambda x), x- > \sin(\lambda x)) \end{cases}}$$

b) Si f est une fonction paire, ou impaire, de $\mathcal{E}(\ \lambda)$, alors, la fonction g ci-dessus est aussi dans $\mathcal{E}(\ \lambda)$, donc f est une fonction non nulle vérifiant **E** et **R**. donc $\lambda = \pi/2[2\pi]$
Réciproquement, si $\lambda = \pi/2\ [2\pi]$, alors la fonction $x \to \cos\lambda x$ est dans $\mathcal{E}(\ \lambda)$ et paire, et la fonction $x \to \sin\lambda x$ est dans $\mathcal{E}(\ \lambda)$ et impaire.

$$\boxed{\text{il existe des solutions paires non nulles ssi } \lambda = \pi/2[2\pi]}$$

$$\boxed{\text{il existe des solutions impaires non nulles ssi } \lambda = \pi/2[2\pi]}$$

dans les deux cas l'ensemble obtenu est bien un sous espace vectoriel comme intersection de deux sous espaces vectoriels.
II.
a)On va utiliser la relation du I 2 : $f^{(n)}(x) = \lambda^n f(x+n)$.

- Etude sur $\mathbb{R}^+$: si $f_{[0,1]}$ est nulle, $f^{(n)}_{[0,1]}$ est nulle aussi, donc f est nulle sur $[n, n+1]$. Comme c'est vrai pour tout entier n , f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
- Etude sur $\mathbb{R}^-$: $f'(x) = \lambda f(x+1)$ et $f_{[0,1]} = 0$ implique que f' est nulle sur $[-1, 0]$, donc f y est constante, donc nulle puisque $f(0) = 0$.

  Et par récurrence: si $f_{[-n,-n+1]} = 0$, f' est nulle sur $[-(n+1), -n]$, donc f est constante sur ce segment elle y est nulle puisque $f(-n) = 0$.

  Ainsi, par récurrence, f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

$$\boxed{\text{si } f \in \mathcal{E}(\lambda) \text{ et } f_{[0,1]} = 0 \text{ alors } f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}}$$

b) sans problème : $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ d'après I2 et la restriction d'une fonction C^∞ est C^∞ . Et par p dérivations successives de **E** , $f^{(p+1)}(x) = \lambda f^{(p)}(x+1)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc pour tout $x = k \in \mathbb{Z}$ $f^{(p+1)}(k) = \lambda f^{(p)}(k+1)$
c)
unicité : elle vient de a). En effet, si g_0 admet deux prolongements f_1 et f_2 dans $\mathcal{E}(\ \lambda)$, alors $f_1 - f_2$ est une fonction de $\mathcal{E}(\ \lambda)$ dont la restriction à $[0,1]$ est nulle, donc $f_1 = f_2$ sur $\mathbb{R}$.
existence :

- Sur $\mathbb{R}_+$: On utilise $f^{(n)}(x) = \lambda^n f(x+n)$ pour définir f sur $[n, n+1]$:

  On définit f sur $[n, n+1]$ par $f(x+n) = \frac{1}{\lambda^n} g_0^{(n)}(x)$, puis sur $\mathbb{R}_+$ en faisant varier n dans $\mathbb{N}$. Il y a un problème de définition en $p \in \mathbb{N}^*$ où f est défini deux fois : sur $[p-1, p]$ par $\frac{1}{\lambda^{p-1}} g_0^{(p-1)}(1)$ et sur $[p, p+1]$ $\frac{1}{\lambda^p} g_0^{(p)}(0)$: or par P_0 ,on a

  $$\frac{1}{\lambda^p} g_0^{(p)}(0) = \frac{1}{\lambda^{p-1}} g_0^{(p-1)}(1)$$

  Par cette définition, f est dérivable sur tout intervalle $]n, n+1[$, avec des prolongements de f' à droite et à gauche des points entiers:

  $$f'_d(n) = \frac{1}{\lambda^n} g_0^{(n+1)}(0) \quad , \quad f'_g(n) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} g_0^{(n)}(1) \quad .$$

  Par P_0 , ces deux prolongements sont égaux, donc, d'après le théorème du prolongement de la dérivée, f est C^1 sur $\mathbb{R}_+$. De plus, la relation $f'(x) = \lambda.f(x+1)$ y est vraie par définition.

  $$\forall x \geq 0\ ,\ f(x) = \lambda^{-E(x)} g_0(x - E(x))$$

- Sur $\mathbb{R}_-$: Comme sur $[-1,0]$ on veut $f'(x) = \lambda g_0(x+1)$ et $f(0) = g_0(0)$, on définit f sur cet intervalle par $f(x) = \int_0^x \lambda g_0(t+1)\,dt + g_0(0)$, ce qui est bien une fonction continue et dérivable sur $[-1,0]$.

  De plus, on a ainsi, par P_0 , $f'_g(0) = \lambda g_0(1) = g'_0(0) = f'_d(0)$ et donc f est dérivable en 0 .

  On raisonne alors par récurrence sur $n \geq 1$:

  si f est définie et vérifie **E** sur $[-n, +\infty[$ on définit f sur $[-(n+1), -n]$ par $f(x) = \int_{-n}^x \lambda f(t+1)\,dt + f(-n)$.

  Là encore, f est bien continue et dérivable sur $[-n-1, -n]$

  et comme $f'_g(-n) = \lambda f(-n+1) = f'_d(-n)$ (puisque f est supposée vérifier **E** en $-n$), f est dérivable en $-n$, donc sur $[-n-1, +\infty[$

  Donc f est définie , continue , dérivable sur $\mathbb{R}^-$.

d) ψ est C^1 par composition de telles fonctions (dénominateurs non nuls) . De plus, on a

$$\psi'(x) = \frac{1-2x}{x^2\,(1-x)^2} \cdot e^{\frac{-1}{x(1-x)}} \quad .$$

Si on pose $X = \frac{1}{x(1-x)}$, on a que $X \to +\infty$ lorsque x tend vers 0^+ ou 1^- , et on a par composition de limites:

$$\psi'(x) \sim_{X->+\infty} \pm X^2 e^{-X} \to 0 \quad .$$

Par théorème du prolongement de la dérivée, on en déduit que ψ est C^1 sur $[0,1]$.
L'existence d'une fonction $f \in \mathcal{E}(\lambda)$ prolongeant ψ est donnée par le a), puisque, comme toutes les dérivées de ψ sont nulles en 0 et en 1 , ψ vérifie clairement P_0 .
Non, f n'est pas de signe constant, puisque ψ' n'est pas de signe constant sur $]0,1[$ donc f n'est pas de signe constant sur $]1,2[$.