CCP PC Mathématiques 1

Problème 2 *Le problème est un problème d'interpolation par des fonctions spleen cubique . Il s'agit d'un problèr classique en dessin assisté par ordinateur ou en conception assisté par ordinateur .Il s'agit d'approcher une famille de poir par une courbe simple qui soit à la fois assez régulière pour l'utilisation pratique et rapide à calculer même pour un gra nombre de points .Les fonctions splines cubiques qui sont C^2 et qui se limite ,une fois résolu un système linéaire tridiagona à des calculs de polynômes de degré au plus 3 est un bon compromis :*

La fonction nulle de $[a, b]$ appartenant à S , $\underline{S \text{ est non vide}}$

A) **Interpolation de f par une fonction de S**

1)

a) Les polynômes $(x_k - X)^3$, $(X - x_{k-1})^3$, $(x_k - X)$, $(X - x_{k-1})$ forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$
En effet

- on a 4 éléments en dimension 4
- le système est libre : soit $P(X) = \alpha(x_k - X)^3 + \beta(X - x_{k-1})^3 + \gamma(x_k - X) + \delta(X - x_{k-1}) = 0$
- On a donc $P"(X) = 6\alpha(x_k - X) + 6\beta(X - x_{k-1})$
  En écrivant (comme $x_k \neq x_{k-1}$)) $P"(x_{k-1}) = 0$ on a $\alpha = 0$, en écrivant $P"(x_k) = 0$ on a $\beta = 0$, On écrit ensui $P(x_{k-1}) = 0$ et $P(x_k) = 0$ pour avoir $\gamma = \delta = 0$

$\left((x_k - X)^3, (X - x_{k-1})^3, (x_k - X), (X - x_{k-1})\right)$ est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$
Posons donc $P_k(x) = a_0(x_k - x)^3 + b_0(x - x_{k-1})^3 + a_1(x_k - x) + b_1(x - x_{k-1})$

On veut donc résoudre $\begin{cases} a_0h^3 + a_1h &= f_{k-1} \\ b_0h^3 + b_1h &= f_k \\ 6a_0h &= m_{k-1} \\ 6b_0h &= m_k \end{cases}$

il y a une solution et une seule

$$a_0 = \frac{1}{6h}m_{k-1}, b_0 = \frac{1}{6h}m_k, a_1 = \frac{1}{h}f_{k-1} - \frac{h}{6}m_{k-1}, b_1 = \frac{1}{h}f_k - \frac{h}{6}m_k$$

Soit

$$\boxed{P_k(x) = \frac{1}{6h}m_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6h}m_k(x - x_{k-1})^3 + \left(\frac{1}{h}f_{k-1} - \frac{h}{6}m_{k-1}\right)(x_k - x) + \left(\frac{1}{h}f_k - \frac{h}{6}m_k\right)(x - x_{k-1})}$$

b) lee problème de défintion de g provient du fait que g est définie deux fois en x_k. Or pour $k = 1, .., n-1$, $P_k(x_k)$ $P_{k+1}(x_k) = f_k$ donc $g(x_k) = f_k$. Pour tout autre réel $x \in]a, b[$, il existe un unique k tel que $x \in]x_{k-1}x_k[$ et donc $g(x) = P_k($ est bien défini de façon unique par unicité de P_k ; enfin $g(a) = f_0$ et $g(b) = f_n$.

$\boxed{g \text{ est bien définie , et est unique}}$

g est C^2 (car polynômiale) en tous points distincts des $(x_k)_{k=0}^n$

En $x_0 = a$ la fonction est définie seulement à droite et g est bien C^2 car polynômiale. Idem en $x_n = b$

reste le problème des $(x_k)_{k=1}^{n-1}$. La fonction admet en ces points des dérivées premières et secondes à gauche et à droite g y sera C^2 ssi on a égalité des dérivées premières et secondes à gauche et à droite :

g sera de classe C^2 sur $[a, b]$ ssi

$$\forall k \in [[1, .., n-1]], \ P_k'(x_k) = P_{k+1}'(x_k), P_k''(x_k) = P_{k+1}''(x_k)$$

La condition $P_k''(x_k) = P_{k+1}''(x_k)$ est toujours vérifiée par construction des P_k $P_k''(x_k) = P_{k+1}''(x_k) = m_k$

La premiere condition se traduit par dérivation :

$$P_k'(x) = -\frac{1}{2h}m_{k-1}(x_k - x)^2 + \frac{1}{2h}m_k(x - x_{k-1})^2 - \left(\frac{1}{h}f_{k-1} - \frac{h}{6}m_{k-1}\right) + \left(\frac{1}{h}f_k - \frac{h}{6}m_k\right)$$

et donc comme $x_{k+1} - x_k = h$

$$P_k'(x_k) = \frac{1}{2}m_kh + \frac{1}{h}(f_k - f_{k-1}) - \frac{h}{6}(m_k - m_{k-1})$$

De même

$$P_{k+1}'(x_k) = -\frac{1}{2}m_kh + \frac{1}{h}(f_{k+1} - f_k) - \frac{h}{6}(m_{k+1} - m_k)$$

g sera de classe C^2 sur $[a,b]$ ssi

$$\frac{1}{2}m_k h+\frac{1}{h}\left(f_k-f_{k-1}\right)-\frac{h}{6}\left(m_k-m_{k-1}\right)=-\frac{1}{2}m_k h+\frac{1}{h}\left(f_{k+1}-f_k\right)-\frac{h}{6}\left(m_{k+1}-m_k\right)$$

ce qui équivaut à :

$$\boxed{\forall k\in[[1,..,n-1]]\ ,\ m_{k-1}+4m_k+m_{k+1}=\tfrac{6}{h^2}\left(f_{k-1}-2f_k+f_{k+1}\right)}$$

c) $g'(a)=\alpha$ se traduit par $P_1'(a)=\alpha$ c'est-à-dire $2m_0+m_1=\dfrac{6}{h^2}\left(-f_0+f_1-\alpha h\right)$

$g'(b)=\beta$ se traduit par $P_n'(b)=\beta$ c'est-à-dire $m_{n-1}+2m_n=\dfrac{6}{h^2}\left(f_{n-1}-f_n+\beta h\right)$

Une condition nécessaire et suffisante pour que g soit de classe C^2 sur $[a,b]$ et vérifie $g'(a)=\alpha$, $g'(b)=\beta$ est donc q $\overrightarrow{m}$ soit solution du système (II.2) $A\overrightarrow{m}=\overrightarrow{b}$ avec

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{b}=\frac{6}{h^2}\begin{pmatrix} -f_0+f_1-\alpha h \\ f_0-2f_1+f_2 \\ \vdots \\ f_{k-1}-2f_k+f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-2}-2f_{n-1}+f_n \\ f_{n-1}-f_n+\beta h \end{pmatrix}$$

$$a_{i,j}=\left\{\begin{array}{l} 2 \text{ si } i=j=1 \text{ ou } i=j=n+1 \\ 4 \text{ si } i=j\notin\{1,n+1\} \\ \ \ 1 \text{ si } |j-i|=1 \\ \ \ \ 0 \text{ sinon} \end{array}\right.\quad ,\ b_j=\left\{\begin{array}{c} -f_0+f_1-\alpha h \text{ si } j=1 \\ f_{j-2}-2f_{j-1}+f_j \text{ si } j\in[[2,n]] \\ f_{n-1}-f_n+\beta h \text{ si } j=n+1 \end{array}\right.$$

On remarque que A est symétrique.

2)

a) On a $A\cdot\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix} 2v_0+v_1 \\ v_0+4v_1+v_2 \\ \vdots \\ v_{k-1}+4v_k+v_{k+1} \\ \\ \vdots \\ v_{n-1}+2v_n \end{pmatrix}$ donc $\langle A\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle=2v_0^2+4\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}v_k^2+2v_n^2+2\sum_{k=0}^{n-1}v_kv_{k+1}$

On obtient donc $\langle A\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle-\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle=v_0^2+3\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}v_k^2+v_n^2+2\sum_{k=0}^{n-1}v_kv_{k+1}$

On reconnaît dans $2v_kv_{k+1}$ le double produit de $\left(v_k+v_{k+1}\right)^2$. On écrit donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(v_k+v_{k+1}\right)^2=\sum_{k=0}^{n-1}v_k^2+\sum_{k=1}^{n}v_k^2+2\sum_{k=0}^{n-1}v_kv_{k+1}=v_0^2+2\sum_{k=1}^{n-1}v_k^2+v_n^2+2\sum_{k=0}^{n-1}v_kv_{k+1}$$

$$\langle A\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle-\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle=\sum_{k=0}^{n-1}\left(v_k+v_{k+1}\right)^2+\sum_{k=1}^{n-1}v_k^2\geq 0$$

$$\text{donc } \boxed{\langle A\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle\geq\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle}$$

Comme on a une somme de termes positifs ,il y a égalité si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} k\in[[0,n-1]]\ ,\ v_k+v_{k+1}=0 \\ v_1=v_2=\cdots v_{n-1}=0 \end{array}\right.$$

$$\text{donc } \boxed{\left(\langle A\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle=\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle\right)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}\right)}$$

b) Si $A\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$, alors $\langle A\cdot\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle=0$, donc $\langle\overrightarrow{v},\overrightarrow{v}\rangle=0$, donc $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$. Le noyau de A est réduit à $\{0\}$
donc $\boxed{\text{A est inversible}}$

3)

Avec $\alpha=\beta=0$, on obtient $\overrightarrow{b}=\dfrac{6}{h^2}\begin{pmatrix} -f_0+f_1 \\ f_0-2f_1+f_2 \\ \vdots \\ f_{k-1}-2f_k+f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-2}-2f_{n-1}+f_n \\ f_{n-1}-f_n \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{b}=H\cdot\overrightarrow{f}$ avec

$$\boxed{H=\frac{6}{h^2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & \ddots & & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & (0) & & & \ddots & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} , H_{i,j}=\begin{cases} -1 \text{ si } i=j=1 \text{ ou } i=j=n+1 \\ -2 \text{ si } i=j\notin\{1,n+1\} \\ \;1 \text{ si } |j-i|=1 \\ \;0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{f}\in KerH \Leftrightarrow \begin{cases} -f_0+f_1=0 \\ f_0-2f_1+f_2=0 \\ \vdots \\ f_{n-2}-2f_{n-1}+f_n=0 \\ f_{n-1}-f_n=0 \end{cases} \Leftrightarrow f_0=f_1=\ldots=f_n$$

$\boxed{KerH \text{ est la droite } Vect\left(\sum_{k=0}^{n}\overrightarrow{e_k}\right)}$

On peut trouver ce résultat sans expliciter H en revenant à l'originie du problème.

Si $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$, comme A est inversible , alors $\overrightarrow{m}=\overrightarrow{0}$,

donc sur $[x_0,x_1]$ $a_0=b_0=0$ et G est affine . Or $G'(a)=0$ donc G est constante sur $[x_0,x_1]$

Le résultat est le même sur chaque $[x_i,x_{i+1}]$ .G est constante par morceauxm et comme G est continue en chaque x_i , est constante sur $[a,b]$ et les f_i sont tous égaux.

Réciproquement si les f_k sont tous égaux , la fonction constante G égale à f_0 , est élément de $W(f,0,0)\cap S$

4) Application

$f(x)=\cos(x)$, $a=0$, $b=\pi$, $n=6$,donc $\alpha=\beta=0$

$\forall i\in\{0,\cdots,6\}$, $f_{6-i}=\cos(\pi-i\dfrac{\pi}{6})=-f_i$

a) Si on effectue une permutation des lignes $0\longleftrightarrow 6, 1\longleftrightarrow 5, 2\longleftrightarrow 4$, on obtient un système linéaire équivalent a précédent:

$$\begin{cases} 2m_0+m_1=f_0 \\ m_0+4m_1+m_2=f_1 \\ m_1+4m_2+m_3=f_2 \\ m_2+4m_3+m_4=f_3 \\ m_3+4m_4+m_5=f_4 \\ m_4+4m_5+m_6=f_5 \\ m_5+2m_6=f_6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} m_5+2m_6=f_6 \\ m_4+4m_5+m_6=f_5 \\ m_3+4m_4+m_5=f_4 \\ m_2+4m_3+m_4=f_3 \\ m_1+4m_2+m_3=f_2 \\ m_0+4m_1+m_2=f_1 \\ 2m_0+m_1=f_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m_5)+2(-m_6)=-f_6=f_0 \\ (-m_4)+4(-m_5)+(-m_6)=f_1 \\ (-m_3)+4(-m_4)+(-m_5)=f_2 \\ (-m_2)+4(-m_3)+(-m_4)=f_3 \\ (-m_1)+4(-m_2)+(-m_3)=f_4 \\ (-m_0)+4(-m_1)+(-m_2)=f_5 \\ 2(-m_0)+(-m_1)=f_6 \end{cases}$$

en multipliant les lignes par -1. :

En changeant l'ordre des inconnues on constate alors que $(m_0,m_1,\cdots m_6)$ et $(-m_6,\cdots-m_1,-m_0)$ sont deux solutions du même système linéaire de Cramer (car A est inversible)

$\boxed{\forall i\in\{0,\cdots,6\} \ , \ m_{6-i}=-m_i}$ et en particulier $\underline{m_3=0}$

La propriété se généralise à n quelcnque pour toute fonction ϕ sur $[0,b]$ vérifiant $\forall x\ \phi(b-x)=-\phi(x)$

b) $A\cdot\overrightarrow{m}=H\cdot\overrightarrow{f} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m_0+m_1=\dfrac{108}{\pi^2}\left(-2+\sqrt{3}\right) \\ m_0+4m_1+m_2=\dfrac{108}{\pi^2}\left(3-2\sqrt{3}\right) \\ m_1+4m_2=\dfrac{108}{\pi^2}\left(-2+\sqrt{3}\right) \end{cases}$ et on obtient après calcul des déterminants 3×3

$$\boxed{m_0=-m_6=\frac{108}{13\pi^2}\left(-22+12\sqrt{3}\right) \ ; \ m_1=-m_5=\frac{108}{13\pi^2}\left(18-11\sqrt{3}\right) \ ; \ m_2=-m_4=\frac{108}{13\pi^2}\left(-11+6\sqrt{3}\right) \ ; \ m_3=0}$$

B) **Une propriété extrémale des fonctions de S**

1) S est un sous-espace vectoriel de $C^2[a,b]$ car c'est

- un sous ensemble de $C^2([a,b])$,
- non vide d'après la question préliminaire 0 et
- stable par combinaison linéaire ,puisque pour chaque $]x_k, x_{k+1}[$ une combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_3[X]$ est da $\mathbb{R}_3[X]$
- Soit alors Φ l'application de S dans $\mathbb{R}^{n+3}$ définie par :

$$\forall u \in S \ , \ \Phi(u) = (u(x_0), u(x_1), \cdots u(x_n), u'(a), u'(b))$$

Φ est linéaire , elle est bijective d'après A-2) , donc S et $\mathbb{R}^{n+3}$ ont la même dimension

$$\boxed{\dim(S) = n+3}$$

remarque : faire l'analogie avec les polynômes de Lagrange.

2)On a $u \in S_0$ ssi $\Phi(u) = (u(x_0), u(x_1), \cdots u(x_n), u'(a), u'(b)) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \{(0,0)\}$. Donc $\boxed{\dim(S_0) = n+1}$

Si $(e_k)_{k\in\{0,2,\cdots n+2\}}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^{n+3}$, $\Phi^{-1}(e_k)_{0\leq k\leq n})$ est une base de S_0 comme image réciproque d'u base par un isomorphisme.

Soit alors u_0 un élément de $S(\alpha,\beta)$ (il existe d'après A-2))

alors $u \in S(\alpha,\beta) \Leftrightarrow (u-u_0) \in S_0$, donc $\underline{S(\alpha,\beta)}$ est un sous espace affine de S de direction S_0

3) $G \in S \cap W(f,\alpha,\beta)$

a)attention : pas d'intégration pr partie sur $[a,b]$ ou les fonctions ne sont pas C^1 ;

Pour tout u $\in W(f,\alpha,\beta)$, calculons $\Phi(u-G) - [\Phi(u) - \Phi(G)] = \displaystyle\int_a^b 2G''(t)(G''(t) - u''(t))dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} 2G''(t)(G''(t)$ $u''(t))dt$

la restriction $G' - u'$ est de classe C^1 sur $[x_k, x_{k+1}]$, la restriction de G'' est un polynôme de degré 1 donc G" est C^1 $G^{(3)}$ est constante (a_k).

$\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} 2G''(t)(G''(t) - u''(t))dt = 2\left[G''(t)(G'(t) - u'(t))\right]_{x_k}^{x_{k+1}} - 2\int_{x_k}^{x_{k+1}} G^{(3)}(t)(G'(t) - u'(t))\ dt,$

$\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} G^{(3)}(t)(G'(t) - u'(t))\ dt = a_k\left[G(t) - u(t)\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = 0$ car $G(x_k) = u(x_k)$ pour tout k .

$\forall k$, $\displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} 2G''(t)(G''(t) - u''(t))dt = 2\left[G''(t)(G'(t) - u'(t))\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$ et donc $\displaystyle\int_a^b 2G''(t)(G''(t) - u''(t))dt = 2\left[G''(t)(G'(t) - u'\right.$

ce crochet est nul car $(G' - u')(a) = (G' - u')(b) = 0$

donc $\boxed{\Phi(u-G) = \Phi(u) - \Phi(G)}$k

b) $\forall v \in C^2[a,b]$, $\Phi(v) \geq 0$ donc $\forall u \in W(f,\alpha,\beta)$, $\Phi(u) = \Phi(u-G) + \Phi(G) \geq \Phi(G)$

comme de plus $G \in W(f,\alpha,\beta)$

$$\boxed{\Phi(G) = \inf_{u\in W(f,\alpha,\beta)} \Phi(u)}$$

c) On reprend les calculs de A-1) avec $m_0 = m_n = 0$

On doit avoir : $m_0 = m_n = 0$

$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \frac{6}{h^2}(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1})$ pour $k = 1, \cdots, n-1$

On doit donc résoudre $\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \\ \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \dfrac{6}{h^2}\begin{pmatrix} f_0 - 2f_1 + f_2 \\ \vdots \\ f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2f_{n-1} + f_n \end{pmatrix}$

La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible , on le démontre en utilisant la méthode utilisée à la question A-2)

<u>donc il y a une solution et une seule notée g</u>

Notons $W(f)$ l'ensemble des fonctions de $C^2[a,b]$ vérifiant la propriété $\mathbf{P}_2$

On refait le calcul comme en a)

$\forall u \in W(f)\ ,\ \Phi(u-g) - [\Phi(u) - \Phi(g)] = 2\left[g''(g'-u')\right]_a^b - 2\int_a^b g^{(3)}(g'-u')$

le crochet est nul car $g''(a) = g''(b) = 0$

On obtient de même $\Phi(u-g) = \Phi(u) - \Phi(g)$

$$\text{puis } \boxed{\Phi(g) = \inf_{u \in W(f)} \Phi(u)}$$