

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE 1998
FILIERE PC EPREUVE 2 Problème 1

1. La fonction f étant continue sur $[-1, 1]$ On peut poser $\phi(x) = \int_0^x f(t)dt$ et ϕ est C^1 sur $[-1, 1]$ comme primitive d'une fonction continue., On a alors $F = \phi \circ \sin$. la fonction sinus est C^1 sur \mathbb{R} à valeur dans $[-1, 1]$ et ϕ est C^1 sur $[-1, 1]$ donc par composition F est C^1 sur \mathbb{R} de dérivée : $[F'(x) = \cos(x).f(\sin(x))]$

2. Soit u une primitive de f . On a $F(x) = u(x+T) - u(x)$. La fonction f étant continue sur \mathbb{R} , u est C^1 sur \mathbb{R} donc F et aussi C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$ car f est périodique de période T , La dérivée est nul sur un intervalle. La fonction F est constante

On peut écrire par changement de variable $u = t + T$, C^1 :

$$\int_0^{x+T} f(t)dt = \int_{-T}^x f(u+T)du = \int_{-T}^x f(u)du = \int_0^x f(u)du + \int_{-T}^0 f(u)du$$

$$F(x) = \int_{-T}^0 f(u)du$$

3. **a)** Pour $m = 0$, la fonction u est définie sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R} u(x) = x$.

b) Pour $m = 1$, on a $\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \frac{1}{|\cos(t)|}$. Pour que cette fonction soit continue sur le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$ il faut et il suffit que $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. On a alors $u(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)} dt$. Le changement de variable C^1 : $t = 2 \arctan(u)$, $u = \tan(t/2)$ donne $u(x) = 2 \int_0^{\tan(x/2)} \frac{1}{1-u^2} du = \int_0^{\tan(x/2)} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right) du = \ln \left| \frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)} \right|$

$$\boxed{\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[u(x) = \ln \left| \frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)} \right|}$$

une autre primitive classique est, $u(x) = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.

5/2: La fonction n'a pas de limite finie si x tend vers $\pm\pi/2$. On ne peut pas espérer définir $u(\pi/2)$ comme $\int_{]0, \pi/2[} \frac{dt}{\cos(t)}$

4. **a)** Comme $1 - m \cdot \sin^2(t) \geq 1 - m > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-m \cdot \sin^2(t)}}$ est continue sur \mathbb{R} et donc u est C^1 sur $\mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-m \cdot \sin^2(x)}}$$

b) On a : $\forall x \in \mathbb{R} u'(x) > 0$, donc : u est croissante (strictement) sur \mathbb{R} .

u' est paire et $u(0) = 0$, et u est C^1 donc $u(-x) = \int_0^{-x} u'(t)dt = \int_0^x u'(-\tau) (-d\tau) = -\int_0^x u'(\tau)d\tau = -u(x)$

$$\boxed{u \text{ est impaire}}$$

dans le cas général si ϕ est paire il existe une constante K telle que $\phi(-x) = K - \phi(x)$

c) Pour $x > 0$, on a : $u(x) \geq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-m}} = \frac{x}{\sqrt{1-m}} \rightarrow_{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc,

$$\boxed{u \text{ admet une limite en } +\infty \text{ égale à } +\infty}$$

5. **a)** De manière analogue au 1.1, v est définie et C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et, sur cet intervalle, on a:

$$v'(x) = \cos(x) \frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2(x))(1-m \sin^2(x))}} = u'(x)$$

car sur $]-\pi/2, \pi/2[$, $\sqrt{1-\sin^2(x)} = |\cos(x)| = \cos(x)$. On a donc $u' = v'$ et donc $u - v$ est constante. De plus, on a $u(0) = v(0) = 0$.

Finalement, pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $u(x) = v(x)$.

b) si $x = \pi/2$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ n'est pas continue ni continue par morceaux sur $[0, 1]$ donc $v(\pi/2)$ n'existe pas. On a toutefois $\lim_{x \rightarrow \pi/2} v(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} u(x) = u(\pi/2)$ car la fonction u est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$. En prolongeant par continuité on peut poser $v(\pi/2) = u(\pi/2)$ et de même $v(-\pi/2) = u(-\pi/2)$

5/2 : vous pouvez répondre de façon tout aussi valable que $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ est intégrable sur $[0, 1[$ car elle est

continue positive sur $[0, 1[$ équivalente en 1 à $\frac{1}{\sqrt{1-t}\sqrt{2(1-m)}}$ intégrable sur $[0, 1[$ car $1/2 < 1$. Donc $v(\pi/2)$ est définie. Puis retrouver par passage à la limite $v(\pi/2) = u(\pi/2)$

c) la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-m \sin(t)^2}}$ est π périodique continue sur \mathbb{R} . D'après la question 2, $u(x + \pi) - u(x) = \int_x^{x+\pi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ est constante. En notant $K(m)$ cette constante et en prenant $x = -\pi/2$ on a : $K(m) = u(\frac{\pi}{2}) - u(-\frac{\pi}{2})$ Donc par parité de u :

$$K(m) = 2.u\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

6. a) La fonction u est C^1 strictement croissante sur \mathbb{R} à dérivée toujours non nul (car la dérivée $\frac{1}{\sqrt{1-m \sin^2(x)}}$ est strictement positive) , donc u est un C^1 difféomorphisme de \mathbb{R} sur $] \lim_{-\infty}(u), \lim_{+\infty}(u)[=]-\infty, +\infty[$ d'après 1.4.c et l'imparité de u . donc $u(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et u admet une fonction réciproque (notée A) C^1 de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . comme $A' = \frac{1}{u' \circ A}$, A' est strictement positive et A est strictement croissante.

u admet une fonction réciproque $A \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, strictement croissante

b) Pour tout réel x , on a $u(A(x) + \pi) = u(A(x)) + K(m) = x + K(m)$ donc

$$A(x + K(m)) = A(u(A(x) + \pi)) = A \circ u(A(x) + \pi) = A(x) + \pi$$

Finalement, $A(x + K(m)) - A(x) = \pi$

$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-mt^2)}}$ étant C^∞ sur \mathbb{R} , u est aussi C^∞ comme primitive d'une fonction continue.

la dérivée de u ne s'annulant pas u est un C^∞ difféomorphisme de \mathbb{R} sur \mathbb{R} ; A est C^∞ sur \mathbb{R} : on peut calculer A'' :

c) On a $A' = \frac{1}{u' \circ A}$ et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A'(x) = \frac{1}{u'(A(x))} = \sqrt{1 - m \sin^2(A(x))}$$

en dérivant cette relation :

$$A''(x) = \left(\frac{-2m \sin(A(x)) \cos(A(x))}{2\sqrt{1 - m \sin^2(A(x))}} \right) \cdot A'(x) = -m \sin(A(x)) \cos(A(x))$$

On a bien la formule demandée:

$$A'' + m \sin(A) \cos(A) = 0$$

7. On a : $S(y) = \sin(A(y))$, $C(y) = \cos(A(y))$, $D(y) = \sqrt{1 - m \sin^2(A(y))} = A'(y)$

a) A est impaire car réciproque d'une fonction impaire. On en déduit que C et D sont paires et que S est impaire.

b) En utilisant 1.6.b, on trouve que S et C sont $2K(m)$ -périodiques et que D est $K(m)$ -périodique.

Remarque: On a donné une période de la fonction. Montrer que c'est la période (donc la plus petite période strictement positive) n'est pas si simple. Ce n'est sans doute pas l'objectif non plus du concepteur du sujet qui a fait calculer aux questions précédentes une période de u et A sans chercher à faire prouver que c'est bien la plus petite strictement positive.

Les fonctions C et S sont dérivables sur \mathbb{R} comme composées de fonctions dérivables et D l'est car A'' est C^2 . On a

$$S' = CD, C' = -SD \text{ et } D' = -mSC$$

Le problème se continue avec deux questions qui utilisent les fonctions précédentes pour étudier une équation aux dérivées partielles. Le second problème portait sur les équations différentielles

Le problème a une origine physique : Si on étudie le mouvement du pendule sans force de frottement on démontre que la période du pendule, dans un système d'unités bien choisi, est $K(\sqrt{\sin(\theta/2)})$ si θ est l'angle maximum du mouvement.