Problème II :

On rappelle que :

1) Dans l'espace vectoriel R^n $(n \in N^*)$, l'application qui à tout $X \in R^n$, $X = (x_1, x_2, .., x_n)$, associe le réel $\|X\| = \max_{i=1,..n} |x_i|$ définit une norme sur R^n.

2) On dit qu'une suite de vecteurs $\left(X^{(k)}\right)_{k \in N}$ de R^n converge vers un vecteur $\Lambda \in R^n$ si et seulement si :

$$\lim_{k \to +\infty} \|X^{(k)} - \Lambda\| = 0$$

3) Dans l'espace vectoriel $M_n(R)$ des matrices carrées d'ordre n $(n \in N^*)$ à coefficients réels, l'application qui, à toute matrice $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ associe le réel $\|A\| = \max_{i=1,..n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$ définit une norme sur $M_n(R)$.

question préliminaire :

Montrer que : $(\forall M \in M_n(R))(\forall X \in R^n)$

$$\|M.X\| \le \|M\| \|X\|$$

Dans toute la suite, $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ désigne une matrice de $M_n(R)$ à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire vérifiant : $(\forall i \in \{1,2,..,n\})$

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|$$

On désigne par D, E, F les matrices de $M_n(R)$ définies par :

$$D = [d_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ où } d_{ii} = a_{ii} \text{ et } d_{ij} = 0 \text{ si } i \ne j$$

$$E = [e_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ où } e_{ij} = -a_{ij} \text{ si } i > j \text{ et } e_{ij} = 0 \text{ si } i \le j$$

$$F = [f_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ où } f_{ij} = -a_{ij} \text{ si } i \lneqq j \text{ et } f_{ij} = 0 \text{ si } i \geqq j$$

de sorte qu'on a :

$$A = D - E - F$$

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 :

1°) **a)** Justifier l'existence de la matrice J définie par : $J = D^{-1}(E + F)$

b) Montrer que $\|J\| < 1$

2°) **a)** Soit $Y \in R^n$. Etablir l'équivalence : $(AY = 0) \Leftrightarrow (Y = JY)$

b) En déduire que A est inversible.

3°) $B \in R^n$ désignant un vecteur fixé, on appelle Λ l'unique solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in R^n$.
On considère la suite de vecteurs $\left(X^{(k)}\right)_{k \in N}$ de R^n définie par

$$\begin{cases} X^{(0)} \in R^n \\ (\forall k \in N)\ X^{(k+1)} = J.X^{(k)} + D^{-1}B \end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall k \in N) \quad X^{(k+1)} - \Lambda = J\left(X^{(k)} - \Lambda\right)$

b) En conclure que la suite $\left(X^{(k)}\right)_{k\in N}$ converge vers Λ.

Partie 2 :

1°) Justifier l'existence de la matrice L définie par $L = (D - E)^{-1} F$

2°) Soit $X \in R^n$ et $Y = L.X$. On pose $X = (x_1, x_2, .., x_n)$ et $Y = (y_1, y_2, .., y_n)$

a) Montrer que : $\left(\forall i \in \{1,2,..,n\}\right)$

$$y_i = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right)$$

où la première somme (respectivement la deuxième somme) est égale à 0 si $i = 1$ (respectivement si $i = n$)

b) Vérifier que $|y_1| < \|X\|$

c) En déduire que $\|Y\| < \|X\|$

3°) On pose $L = \left[\alpha_{ij}\right]_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$

a) Justifier qu'il existe $i_0 \in \{1,2,..,n\}$ tel que $\|L\| = \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{i_0 j}\right|$

b) On considère le vecteur $X_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ où $\left(\forall j \in \{1,2,..,n\}\right)$ $\begin{cases} \varepsilon_j = 1 \text{ si } \alpha_{i_0 j} \ge 0 \\ \varepsilon_j = -1 \text{ sinon} \end{cases}$

Montrer que $\|L.X_0\| = \|L\|$

c) En déduire que $\|L\| < 1$

4°) $B \in R^n$ désignant un vecteur fixé, on appelle Λ l'unique solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in R^n$.
On considère la suite de vecteurs $\left(Y^{(k)}\right)_{k\in N}$ de R^n définie par

$$\begin{cases} Y^{(0)} \in R^n \\ (\forall k \in N)\ Y^{(k+1)} = L.Y^{(k)} + (D - E)^{-1} B \end{cases}$$

a) Montrer que : $(\forall k \in N) \quad Y^{(k+1)} - \Lambda = L\left(Y^{(k)} - \Lambda\right)$

b) En conclure que la suite $\left(Y^{(k)}\right)_{k\in N}$ converge vers Λ.