II. Problème II

Si $n \geq 1$ est un entier, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On désigne par $<.\,.\,.>$ le produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire celui pour lequel la base naturelle $\{(1,0,..,0), (0,1,0,..,0),.., (0,..,0,1)\}$ est orthonormée.

Soient $a<b$ deux réels et $n \geq 3$ un entier. On désigne par $C^2[a,b]$ l'ensemble des fonctions numériques deux fois continûment dérivables sur $[a,b]$. On divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on considère les $(n+1)$ points de $[a,b]$: $x_k = a + k \cdot h$; $k = 0,..,n$.

On se donne une fonction numérique f définie sur $[a,b]$ et on note f_k ses valeurs aux points x_k, c'est à dire :

$$\forall k \in \{0, \ldots, n\} \quad : \quad f(x_k) = f_k$$

Si α et β sont deux réels donnés, on désigne par $\mathbf{W}(f, \alpha, \beta)$ l'ensemble des fonctions numériques u qui vérifient les trois propriétés :

P1) u appartient à $C^2[a,b]$

P2) u coïncide avec f en chaque point x_k $\quad \forall k \in \{0,\ldots,n\} \qquad u(x_k) = f_k$

P3) $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$

On désigne par S l'ensemble des fonctions numériques u de $C^2[a,b]$ qui vérifient la propriété :

P4) Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, $(k = 1, \ldots, n)$, u est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Justifier succinctement que S est non vide

On désigne par $\vec{\mathbf{e}}_0, \vec{\mathbf{e}}_1, \ldots, \vec{\mathbf{e}}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ à des matrices à $(n+1)$ lignes et une colonne.

A. *Interpolation de f par une fonction de S.*

Les réels α, β étant donnés, on cherche une fonction G de $\mathbf{W}(f, \alpha, \beta)$ qui soit dans S.

1) Soit $\vec{\mathbf{m}} = \sum_{k=0}^{n} m_k \vec{\mathbf{e}}_k$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, donné par ses composantes sur la base canonique.

a) Soit k un entier de $\{1,\ldots,n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à 3, P_k, tel que :
$$\begin{cases} P_k(x_{k-1}) = f_{k-1} \\ P_k(x_k) = f_k \\ P_k''(x_{k-1}) = m_{k-1} \\ P_k''(x_k) = m_k \end{cases}$$

On cherchera P_k sous la forme :

$$P_k(x) = a_0(x_k - x)^3 + b_0(x - x_{k-1})^3 + a_1(x_k - x) + b_1(x - x_{k-1})$$

et on explicitera les coefficients (a_0, a_1, b_0, b_1) en fonction de $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k, h)$

b) On considère la fonction g dont la restriction à $[x_{k-1}, x_k]$, $(k = 1, \ldots, n)$ est P_k. Vérifier que g est bien définie et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que g soit deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$ est que

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \frac{6}{h^2}(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}) \quad , k = 1, \ldots, n-1$$

c) En déduire qu'une CNS pour que g soit deux fois continûment dérivable sur $[a,b]$ et vérifie : $g'(a) = \alpha$, $g'(b) = \beta$, est que le vecteur $\vec{\mathbf{m}}$, soit solution d'un système linéaire de la forme :

I-1) $\qquad \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{m}} = \vec{\mathbf{b}}$,

où $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $(2,4,4,\ldots,4,2)$ et $\vec{\mathbf{b}}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, que l'on précisera. On ne cherchera pas à résoudre ce système. Que remarque-t-on quant à la forme de $\mathbf{A}$?

) Soit $\vec{\mathbf{v}} = \sum_{k=0}^{n} v_k \vec{\mathbf{e}}_k$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, donné par ses composantes sur la base canonique.

a) Montrer que $< \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} > \; \geq \; < \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{v}} >$. Déterminer les vecteurs $\vec{\mathbf{v}}$ pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.

b) En déduire que $\mathbf{A}$ est inversible.

c) En déduire l'existence et l'unicité de la fonction G cherchée. Indiquer au moins un algorithme permettant de résoudre en pratique le système **(II-1)**.

3) On suppose pour cette question que $\alpha=\beta=0$. Montrer que le vecteur $\vec{\mathbf{b}}$ du membre de droite de **(II-1)** est de la forme $\vec{\mathbf{b}} = \mathbf{H} \cdot \vec{\mathbf{f}}$, où $\vec{\mathbf{f}} = \sum_{k=0}^{n} f_k \vec{\mathbf{e}}_k$ et $\mathbf{H}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ que

l'on precisera. Déterminer le noyau de **H**. Pouvait on le connaître sans expliciter **H** ?

4) **Application**. On considère la fonction $f(x)=Cos(x)$ avec $a=0$ et $b=\pi$, et on prend $n=6$. On cherche la solution $(m_0,m_1,...,m_6)$ du système **(II-1)**, dans le cas où $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$.

   a) Montrer, sans calculer $\vec{\mathbf{m}}$, que l'on a les relations : $m_i = -m_{6-i}$; $i = 0,1,2,3$. On pourra pour cela, par exemple, introduire la matrice de permutation associée à ces relations. Cette propriété se généralise-t-elle à n quelconque ?

   b) Déterminer alors $(m_0,m_1,...,m_6)$.

B. *Une propriété « extrémale » des fonctions de S.*

1) Montrer que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Indiquer sa dimension : il pourra être utile d'exhiber une application linéaire de S dans un certain $\mathbb{R}^p$

2) On désigne par S_0 la partie de S formée des fonctions u vérifiant : $u'(a)=u'(b)=0$. Montrer que S_0 est un sous-espace vectoriel de S. Indiquer une base de S_0 ainsi que sa dimension. Si α et β sont deux réels donnés, caractériser l'ensemble $S(\alpha, \beta)$ des éléments u de S vérifiant : $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$

3) A chaque fonction u de $C^2[a,b]$ on associe le nombre $\Phi(u)$ défini par : $\Phi(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 dx$. Les réels α, β étant donnés, **G** désigne la fonction déterminée à la partie précédente.

   a) Montrer que pour tout u de $W(f, \alpha, \beta)$ on a : $\Phi(u-G) = \Phi(u) - \Phi(G)$. Il sera utile de considérer directement l'expression $\Phi(u-G) - [\Phi(u) - \Phi(G)]$

   b) En déduire que : $\Phi(G) = \underset{u \in W(f,\alpha,\beta)}{Inf} \Phi(u)$.

   c) Existe-t-il une fonction g de S vérifiant la propriété **P2** et la condition $g''(a) = g''(b) = 0$? Si oui, que représente $\Phi(g)$?