

II. Problème II

Si $n \geq 1$ est un entier, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On désigne par $\langle \dots \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique sur \mathbb{R}^n , c'est à dire celui pour lequel la base naturelle $\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ est orthonormée.

Soient $a < b$ deux réels et $n \geq 3$ un entier. On désigne par $C^2[a, b]$ l'ensemble des fonctions numériques deux fois continûment dérivables sur $[a, b]$. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on considère les $(n+1)$ points de $[a, b]$: $x_k = a + k \cdot h$; $k = 0, \dots, n$.

On se donne une fonction numérique f définie sur $[\alpha, b]$ et on note f_k ses valeurs aux points x_k , c'est à dire :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} : f(x_k) = f_k$$

Si α et β sont deux réels donnés, on désigne par $\mathbf{W}(f, \alpha, \beta)$ l'ensemble des fonctions numériques u qui vérifient les trois propriétés :

P1) u appartient à $C^2[\alpha, b]$

P2) u coïncide avec f en chaque point $x_k \dots \forall k \in \{0, \dots, n\} \quad u(x_k) = f_k$

P3) $u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta$

On désigne par S l'ensemble des fonctions numériques u de $C^2[\alpha, b]$ qui vérifient la propriété :

P4) Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$, ($k = 1, \dots, n$), u est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

Justifier succinctement que S est non vide

On désigne par $\bar{\mathbf{e}}_0, \bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$ la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} et on identifie les vecteurs de \mathbb{R}^{n+1} à des matrices à $(n+1)$ lignes et une colonne.

A. Interpolation de f par une fonction de S .

Les réels α, β étant donnés, on cherche une fonction G de $\mathbf{W}(f, \alpha, \beta)$ qui soit dans S .

1) Soit $\bar{\mathbf{m}} = \sum_{k=0}^n m_k \bar{\mathbf{e}}_k$ un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} , donné par ses composantes sur la base canonique.

a) Soit k un entier de $\{1, \dots, n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré

$$\text{inférieur ou égal à 3, } P_k, \text{ tel que : } \begin{cases} P_k(x_{k-1}) = f_{k-1} \\ P_k(x_k) = f_k \\ P_k'(x_{k-1}) = m_{k-1} \\ P_k'(x_k) = m_k \end{cases}$$

On cherchera P_k sous la forme :

$$P_k(x) = a_0(x_k - x)^5 + b_0(x - x_{k-1})^5 + a_1(x_k - x) + b_1(x - x_{k-1})$$

et on explicitera les coefficients (a_0, a_1, b_0, b_1) en fonction de $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k, h)$

- b) On considère la fonction g dont la restriction à $[x_{k-1}, x_k], (k = 1, \dots, n)$ est P_k . Vérifier que g est bien définie et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que g soit deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ est que

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \frac{6}{h^2} (f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}), \quad k = 1, \dots, n-1$$

- c) En déduire qu'une CNS pour que g soit deux fois continûment dérivable sur $[a, b]$ et vérifie : $g'(a) = \alpha, g'(b) = \beta$, est que le vecteur \vec{m} , soit solution d'un système linéaire de la forme :

$$\text{II-1) } \mathbf{A} \cdot \vec{m} = \vec{b},$$

où \mathbf{A} est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont $(2, 4, 4, \dots, 4, 2)$ et \vec{b} un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} , que l'on précisera. On ne cherchera pas à résoudre ce système. Que remarque-t-on quant à la forme de \mathbf{A} ?

Soit $\vec{v} = \sum_{k=0}^n v_k \vec{e}_k$ un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} , donné par ses composantes sur la base canonique

- a) Montrer que $\langle \mathbf{A} \cdot \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$. Déterminer les vecteurs \vec{v} pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité

b) En déduire que \mathbf{A} est inversible.

c) En déduire l'existence et l'unicité de la fonction G cherchée. Indiquer au moins un algorithme permettant de résoudre en pratique le système (II-1).

- 3) On suppose pour cette question que $\alpha = \beta = 0$. Montrer que le vecteur \vec{b} du membre de droite de (II-1) est de la forme $\vec{b} = \mathbf{H} \cdot \vec{f}$, ou $\vec{f} = \sum_{k=0}^n f_k \vec{e}_k$ et \mathbf{H} est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ que

l'on précisera. Déterminer le noyau de \mathbf{H} . Pouvait-on le connaître sans expliciter \mathbf{H} ?

4) **Application.** On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$ avec $a=0$ et $b=\pi$, et on prend $n=6$. On cherche la solution (m_0, m_1, \dots, m_6) du système (II-1), dans le cas où $\alpha = f'(a)$, $\beta = f'(b)$.

a) Montrer, sans calculer $\bar{\mathbf{m}}$, que l'on a les relations : $m_i = -m_{6-i}$; $i = 0, 1, 2, 3$. On pourra pour cela, par exemple, introduire la matrice de permutation associée à ces relations. Cette propriété se généralise-t-elle à n quelconque ?

b) Déterminer alors (m_0, m_1, \dots, m_6) .

B. Une propriété « extrémale » des fonctions de \mathcal{S} .

1) Montrer que \mathcal{S} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Indiquer sa dimension : il pourra être utile d'exhiber une application linéaire de \mathcal{S} dans un certain \mathbb{R}^p .

2) On désigne par \mathcal{S}_0 la partie de \mathcal{S} formée des fonctions u vérifiant : $u'(a) = u'(b) = 0$. Montrer que \mathcal{S}_0 est un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} . Indiquer une base de \mathcal{S}_0 ainsi que sa dimension. Si α et β sont deux réels donnés, caractériser l'ensemble $\mathcal{S}(\alpha, \beta)$ des éléments u de \mathcal{S} vérifiant : $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$.

3) A chaque fonction u de $\mathcal{C}^2[a, b]$ on associe le nombre $\Phi(u)$ défini par :

$$\Phi(u) = \int_a^b [u''(x)]^2 dx$$

Les réels α, β étant donnés, G désigne la fonction déterminée à la

partie précédente.

a) Montrer que pour tout u de $\mathcal{W}(f, \alpha, \beta)$ on a : $\Phi(u - G) = \Phi(u) - \Phi(G)$. Il sera utile de considérer directement l'expression $\Phi(u - G) = [\Phi(u) - \Phi(G)]$.

b) En déduire que : $\Phi(G) = \inf_{u \in \mathcal{W}(f, \alpha, \beta)} \Phi(u)$.

c) Existe-t-il une fonction g de \mathcal{S} vérifiant la propriété P2 et la condition $g''(a) = g''(b) = 0$? Si oui, que représente $\Phi(g)$?