EPITA 2002

Mathématiques I - 3 heures

Dans ce problème, on désigne par E un **K**-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On dira qu'un endomorphisme f de E est *cyclique* s'il existe un vecteur x_0 de **E** tel que :

$$E = \mathrm{Vect}(f^k(x_0) \;/\; k \in \mathbb{N}) \text{ ou encore } E = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots).$$

Dans la partie I, on donne quelques exemples d'endomorphismes cycliques. Dans la partie II, on procède à une étude plus générale des endomorphismes cycliques.

PARTIE I

1°) Deux exemples d'endomorphismes cycliques en dimension $n = 3$

Dans cette question seulement, l'espace E est de dimension 3 et rapporté à une base (e_1, e_2, e_3).

a) On considère l'endomorphisme a dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Exprimer $a(e_1)$ et $a^2(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et en déduire que a est cyclique.
- Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme a.
- Pour chacune des trois valeurs propres possibles, déterminer un vecteur propre dont la troisième composante est égale à 1. En déduire une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale qu'on explicitera.

b) On considère l'endomorphisme b dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Exprimer $b(e_1)$ et $b^2(e_1)$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et en déduire que b est cyclique.
- Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme b.
- Etudier si l'endomorphisme b est ou non diagonalisable.

2°) Un exemple d'endomorphisme cyclique en dimension n

Dans cette question, on note c un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs propres associés à ces n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on pose alors $x_0 = x_1 + \ldots + x_n$.

a) Exprimer $c(x_1 + \ldots + x_n)$, $c^2(x_1 + \ldots + x_n)$, $\ldots$, $c^{n-1}(x_1 + \ldots + x_n)$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, puis établir que la famille $(x_0, c(x_0), \ldots, c^{n-1}(x_0))$ est libre dans E.

b) En déduire que l'endomorphisme c est cyclique.

PARTIE II

Dans cette partie II, on note f un endomorphisme cyclique de l'espace vectoriel E ($\dim E = n$), autrement dit un endomorphisme f pour lequel existe un vecteur x_0 de E tel que :

$$E = \mathrm{Vect}(f^k(x_0) \,/\, k \in \mathbf{N}) \text{ ou encore } E = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots).$$

Si $Q(X) = q_m X^m + q_{m-1} X^{m-1} + \dots + q_1 X + q_0$ désigne un polynôme de $\mathbf{K}[X]$, on pose :

$$Q(f) = q_m f^m + q_{m-1} f^{m-1} + \dots + q_1 f + q_0 \mathrm{Id} \quad \text{(Id endomorphisme identité de E).}$$

3°) Une base adaptée de E

On désigne par m le plus grand nombre entier naturel tel que :

$(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0), f^m(x_0))$ est liée.

a) Justifier l'existence d'un tel nombre entier naturel m, puis montrer par récurrence sur k que les vecteurs $f^{m+k}(x_0)$ appartiennent à $\mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

b) En déduire que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est une base de E, puis que $m = n$.

Dans toute la suite de ce problème, on convient de poser :

$$f^n(x_0) = p_{n-1} f^{n-1}(x_0) + \dots + p_1 f(x_0) + p_0 x_0$$

et on désigne alors par P le polynôme de $\mathbf{K}[X]$ défini par $P(X) = X^n - p_{n-1}X^{n-1} - \dots - p_1 X - p_0$.

4°) Matrice et polynôme annulateur de f

a) Ecrire la matrice M de f dans la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

b) Montrer que les n endomorphismes $\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}$ sont indépendants, puis en déduire qu'il n'existe aucun polynôme Q de degré strictement inférieur à n tel que $Q(f) = O$.

c) Déterminer l'image par l'endomorphisme $P(f) = f^n - p_{n-1}f^{n-1} - \dots - p_1 f - p_0\mathrm{Id}$ des vecteurs de la base $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, puis en déduire que $P(f) = O$.

5°) Caractérisation des endomorphismes cycliques diagonalisables

a) On considère une valeur propre λ de f et un vecteur propre associé x.
Calculer $f^k(x)$ pour $k \in \mathbf{N}$ et en déduire que $P(\lambda) = 0$.

b) On considère une valeur propre λ de f. Déterminer le rang de l'endomorphisme $f - \lambda\mathrm{Id}$ à l'aide de sa matrice, puis en déduire la dimension du sous-espace propre associé à λ.

c) Etablir que l'endomorphisme cyclique f est diagonalisable si et seulement s'il possède n valeurs propres distinctes.

6°) Etude du commutant de f lorsque f est cyclique

a) Montrer que le commutant $C(f) = \{ g \in L(E) \,/\, g \circ f = f \circ g \}$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de L(E).

b) Soient deux endomorphismes u et v appartenant à $C(f)$.
Montrer, si $u(x_0) = v(x_0)$, que $u = v$.

c) Soit g un endomorphisme pour lequel on pose $g(x_0) = a_{n-1}f^{n-1}(x_0) + \dots + a_1 f(x_0) + a_0 x_0$.
En déduire, si g appartient à $C(f)$, que $g = a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1 f + a_0\mathrm{Id}$.

d) En déduire que le commutant $C(f)$ est de dimension n et démontrer qu'il admet pour base $(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$.