PREMIERE PARTIE

1. **a)**Soit $U_n = a$ une suite constante alors on a $a = \frac{1}{2}(a^2 + a^2)$ soit $\boxed{a = 0 \text{ ou } a = 1}$.

   Réciproquement, les suites constantes égales à 0 ou 1 sont dans S.

   b)Si l est une limite finie d'une suite (U_n) de S alors, par passage à la limite dans la relation $(\mathcal{R})$ on obtient $l^2 = l$.

   Comme tous les termes de la suite (U_n) sont positifs, la seule limite infinie possible est $+\infty$.

   $$\boxed{l = 0 \text{ , } l = 1 \text{ ou } l = +\infty}$$

   c)Si $U_{N-1} = U_N = U_{N+1} = a$ alors, comme à la question **a.** on a $a = a^2$ donc $a = 0$ ou $a = 1$

   Par récurrence double sur $n > N$, $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$ alors $U_{n+2} = \frac{1}{2}\left(U_{n+1}^2 + U_n^2\right) = a$.Donc $\forall n \geq N \; U_n = a$

   mais il ne faut pas oublier les $n \leq N$:

   Par récurrence décroissante double pour $n \leq N$ si $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$ alors $U_{n-1}^2 = 2U_{n+1} - U_n^2 = 2a - a^2 = a^2$ e comme $U_{n-1} \geq 0$ et $a \geq 0$:$U_{n-1} = a$

   $$\boxed{\text{Si la suite a trois termes consécutifs égaux alors la suite est constante égal à 0 ou à 1}}$$

   d)Si $U_{n-1} = U_n = 1$ alors on a aussi $U_{n+1} = 1$ et on applique la question précédente.

   e)Si $U_n = 0$ avec $n \geq 2$ alors $\frac{1}{2}\left(U_{n-2}^2 + U_{n-1}^2\right) = 0$ donc $U_n = U_{n-1} = U_{n-2} = 0$, on applique là aussi la question **c.**

2. cf figure à la fin

   a) $X = 0$ est une droite verticale , X=Y est une droite de pente $\pi/4$, $X^2 + Y^2 - 2Y = X^2 + (Y-1)^2 = 2$ est le cercl de centre $(0,1)$ de rayon 1 .

   D'où le domaine définie par les inéquations . On oit que pour $(X, Y) \neq (0,0)$ $Y \geq 1$

   $$\boxed{\left(0 \leq X \leq Y \leq \frac{X^2+Y^2}{2}\right) \Longrightarrow (Y \geq 1 \text{ ou } X = Y = 0)}$$

   par le calcul : $Y \geq X \geq 0 \Longrightarrow Y^2 \geq X^2$ et donc avec $X^2 + Y^2 \geq 2Y$ on trouve $2Y^2 \geq 2X^2$ donc $Y \geq 1$ ou $Y \leq 0$. Dan le second cas on a $0 \leq X \leq Y \leq 0$ donc $X = Y = 0$

   b) On a cette fois ci le cercle de centre $(1,0)$ de rayon 1

   On a maintenant $X^2 \leq Y^2$ donc $2Y^2 \leq 2Y$ donc $Y \in [0,1]$

   $$\boxed{\left(\frac{X^2+Y^2}{2} \leq X \leq Y\right) \Rightarrow Y \leq 1}$$

3. On a $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}\left(\left(U_n^2 + U_{n-1}^2\right) - \left(U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2\right)\right) = \frac{1}{2}(U_n^2 - U_{n-2}^2) = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-2})(U_n + U_{n-2})$. Et comme l suite est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ on a :

   $$\operatorname{sgn}(U_{n+1} - U_n) = \operatorname{sgn}(U_n - U_{n-2}).$$

4. **a)**Supposons que $U_{N+1} \geq U_N$ et $U_{N+1} \geq U_{N-1}$ alors, vu la question précédente, on sait que $\operatorname{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) =$ $\operatorname{sgn}(U_{N+1} - U_{N-1})$ et donc $\boxed{U_{N+2} \geq U_{N+1} \geq U_N}$.

   b)Par récurrence on a alors

   $$\forall p \geq N, \; U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p.$$

   En effet si $U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p$ alors d'après la question 3) avec $n = p+2$:$U_{p+3} \geq U_{p+2}$ et $U_{p+2} \geq U_{p+1}$ est déjà suppos vrai.

   c) Si $U_n = U_{n+1}$ alors (toujours $Q3$) $U_n = U_{n-2}$, et donc comme la suite est croissante à partir du rang N : pou $n-2 \geq N$ $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$. On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante . Ce qui est exclu par l sujet.

   $$\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ est strictement croissante à partir du rang } N+2}$$

   d) On prend $X = U_N$,$Y = U_{N+1}$ et donc $U_{N+2} = \frac{X^2+Y^2}{2}$ on a donc par croissance $X \leq Y \leq \frac{X^2+Y^2}{2}$ donc $Y = U_{N+1} \geq$ ou $U_N = U_{N+1} = 0$. le second cas est exclus car la suite n'est pas constante. Donc $U_{N+1} \geq 1$,donc aussu $U_{N+2} \geq 1$ A partir de la la suite est strictement croissante .Elle converge vers $l > 1$ ou elle diverge vers $+\infty$.D'après la question seule la seconde solution est possible.

   $$(U_{N+1} \geq U_N \text{ et } U_{N+1} \geq U_{N-1}) \Rightarrow \lim (U_N) = +\infty$$

5. Même principe :

a)Supposons que $U_{N+1} \leq U_N$ et $U_{N+1} \leq U_{N-1}$ alors, vu la question précédente, on sait que $\mathrm{sgn}\left(U_{N+2} - U_{N+1}\right) =$ $\mathrm{sgn}\left(U_{N+1} - U_{N-1}\right)$ et donc $\boxed{U_{N+2} \leq U_{N+1} \leq U_N}$.

b)Par récurrence on a alors

$$\forall p \geq N,\ U_{p+2} \leq U_{p+1} \leq U_p.$$

c) Si $U_n = U_{n+1}$ alors (toujours $Q3$) $U_n = U_{n-2}$, et donc comme la suite est décroissante à partir du rang N, pou $n - 2 \geq N$, $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$. On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante . Ce qui est exclu par l sujet.

$$\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ est strictement décroissante à partir du rang } N}$$

d) On prend $X = U_{N+1}, Y = U_N$ et donc $U_{N+2} = \frac{X^2+Y^2}{2}$ on a donc par décroissance $\frac{X^2+Y^2}{2} \leq X \leq Y$ donc $Y = U_N \leq$
On a $U_{N+2} \leq 1$ puis une suite qui décroît strictement.. La seule limite possible est 0 (cf question 1) on a

$$\boxed{(U_{N+1} \leq U_N \text{ et } U_{N+1} \leq U_{N-1}) \Rightarrow \lim\left(U_N\right) = 0}$$

6. **a)** par l'absurde on suppose $U_0 = U_1$ et on distingue trois cas :

- $U_0 = U_1 = U_2$ alors la suite est constante d'après Q1c) , absurde par hypothèse
- $U_0 = U_1 > U_2$ les hypothèses de I4 avec $N = 1$ s'appliquent $\lim\left(U_n\right) = +\infty$ absurde par hypothèse
- $U_0 = U_1 < U_2$ les hypothèses de I5 s'appliquent $\lim\left(U_n\right) = 0$ absurde par hypothèse

b) même principe :($n \geq 2$ pour que U_{n-2} existe)

- si $U_n = U_{n-1}$ la méthode du a) prouve que c'est absurde en prenant les 3 cas pour U_{n+2} : donc $U_n \neq U_{n-1}$
- si $U_n < U_{n-1}$ et si $U_n \leq U_{n-2}$ alors $\lim\left(U_n\right) = 0$ en prenant $N = n - 1$ dans la question 5::donc $U_n < U_{n-1} \Rightarrow$ $U_{n-2} < U_n < U_{n-1}$
- de même avec la question 4 $U_n > U_{n-1} \Rightarrow U_{n-2} > U_n > U_{n-1}$

$$\boxed{\text{pour } n > 2 \text{ , } U_n \text{ est strictement compris entre } U_{n-2} \text{ et } U_{n-1}}$$

c) On applique par récurrence la question précédente :

- U_2 est strictement compris entre U_0 et U_1 donc $U_0 < U_2 < U_1$
- U_3 est strictement compris entre U_1 et U_2 donc $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$
- U_4 est strictement compris entre U_2 et U_3 donc $U_0 < U_2 < U_4 < U_3 < U_1$
- On suppose que pour p fixé $U_0 < U_2 < \cdots < U_{2p} < U_{2p+1} < \cdots U_1$
  alors comme U_{2p+2} est strictement compris entre U_{2p} et U_{2p+1} , puis comme U_{2p+3} est strictement compris entr U_{2p+1} et U_{2p+2} on a :
$$U_0 < U_2 < \cdots < U_{2p} < U_{2p+2} < U_{2p+3} < U_{2p+1} < \cdots U_1$$

La suite des termes paires et croissante majorée par U_1 elle converge vers $\lambda > 0$ (car $\lambda \geq U_2 > U_0 \geq 0$)

La suite des termes impairs est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers μ

Comme $U_{2n+1} = \frac{U_{2n}^2 + U_{2n-1}^2}{2}$ on a $\mu = \frac{\lambda^2+\mu^2}{2}$ et de même $\lambda = \frac{\mu^2+\lambda^2}{2}$ donc $\lambda = \mu > 0$ et donc en reportant $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda >$ donc $\lambda = 1$

Remarque : je n'arrive pas à utiliser directement le théorème des suites adjacentes en prouvant $\lim\left(U_{2n+1} - U_{2n}\right) = 0$

d) parfaitement symétrique avec (U_{2n}) décroissante strictement , (U_{2n+1}) croissante strictement et $\mu > 0$

$$\boxed{\text{si la suite non constante ne converge pas vers 0 et ne diverge pas vers } +\infty \text{ , elle converge vers 1}}$$

remarqu : comme une suite (U_n) constante qui ne converge pas vers 0 converge vers 1 , le résultat peut-être étendu.

e) On prend un $(x, y) \in Q$ et on sépare les cas pour la suite (U_n) :

- (Un) est constante égale à 0 : $\lim\left(U_n\right) = 0$ et $(x, y) \in E_0$
- (Un) est constante égale à 1 : $\lim\left(U_n\right) = 1$ et $(x, y) \in E_1$
- (U_n) est non constante de limite nulle : $(x, y) \in E_0$
- (U_n) est non constante de limite infinie : $(x, y) \in E_\infty$

- (U_n) est non constante de limite ni nulle ni infinie alors d'après le début de cette question $\lim (U_n) = 1$: $(x, y) \in E$
On a vu tous les cas possibles :
$$\boxed{Q = E_0 \cup E_1 \cup E_\infty}$$

7. **a)** Si $U_N > 1$ et si $U_{N+1} > 1$ une récurrence double donne $n \geq N \implies u_n > 1$ et donc la suite n'est pas constante et n
peut pas converger vers 0.

   Si elle ne converge pas vers $+\infty$ la question précédente s'applique et donc les termes de la suite sont alternativement plu
petit et plus grand que la limite 1 . Absurde car on a deux termes consécutifs strictement plus grand que 1 .

   b) idem car $n \leq N \implies u_n < 1$ on a donc soit la suite constante nulle (qui tend vers 0) soit une suite non constante e
on utilise la question 6 .

   On a donc une description de la position de U_n par rapport à 1 qui va toujours servir:

   - si deux termes consécutifs sont > 1 la suite diverge vers $+\infty$
   - si deux termes consécutifs sont < 1 la suite converge vers 0
   - si la suite oscille autour de 1 elle converge vers 1
   - il n'y a pas d'autres cas possibles.

DEUXIEME PARTIE

1. figures en annexe
a) $U_2(x, y) = 1 \iff x^2 + y^2 = 2$, cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

   b) $U_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(y^2 + \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2\right) \iff 4y^2 + \left(x^2+y^2\right)^2 = 8 \iff \left(x^2+y^2\right) = \sqrt{8-4y^2}$ et $y \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 =$
$\sqrt{8-4y^2} - y^2$ et $y \leq \sqrt{2}$ (car $y \geq 0$)
On doit avoir $\sqrt{8-4y^2} - y^2 \geq 0$ ce qui équivaut à $\sqrt{8-4y^2} \geq y^2$. comme tout est positif on étudie $8 - 4y^2 \geq y^4$ so
$y^4 + 4y^2 - 8 \leq 0$ on résout $Y^2 + 4Y - 8 = 0$: $y \leq \sqrt{2\sqrt{3} - 2}$
On a donc :
$$U_3(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{8-4y^2} - y^2} \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{2\sqrt{3} - 2}$$

   On peut constater sans calcul de dérivée que h décroît : $y- > 4y^2$ décroît et $\sqrt{\ }$ croit donc $y- > \sqrt{8-4y^2}$ décroît ...

   On doit calculer h' pour préciser les tangentes :
$$h'(y) = \frac{\frac{-4y}{\sqrt{8-4y^2}} - 2y}{2h(y)}$$

   d'où $h(0) = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $h'(0) = 0$, $h\left(\sqrt{2\sqrt{3} - 2}\right) = 0$ avec une tangente verticale . D'où le graphe de h et celui de C_3 pa
symétrie par rapport à la première bissectrice.

   c) L'intersection de C_2 et C_3 est obtenue pour $U_2 = U_3 = 1$, donc (11d) pour la suite constante égale à 1 : $C_2 \cap C_3 =$
$\{(1, 1)\}$

   d) tout point à l'intérieur de C_2 et C_3 vérifie $U_2 < 1$ et $U_3 < 1$ donc est dans E_0 d'aprèsI7 . de même tout point extérieu
aux deux surfaces est dans E_∞ .

2. **a)** récurrence double : U_0 et U_1 sont continues et si U_{n-1} et U_n sont continues U_{n+1} est continue comme produit e
combinaison linéaire de fonctions continues.

   b) Si la suite $(U_n(x, y))$ converge vers 0 tous ses termes à partir d'un certain rang sont plus petit que 1/2 : $\exists N$
$\geq N \Rightarrow U_n(x, y) \leq 1/2$. par continuité de la fonction U_N on a donc $U_N(x', y') < 1$ pour tout point (x', y') assez proch
de (x, y) et de même pour U_{N+1}. Donc d'après $I.7$ $(U_n(x', y'))$ converge vers 0.

   remarque : avec le cours de sup sur les fonctions de deux variables on peut améliorer la rédaction avec des quantificateur
$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists \eta > 0 \text{ } \sup(|x - x'|, |y - y'|) \leq \eta \Rightarrow (x', y') \in E_0$$

   idem pour E_∞ $n > N \implies U_n(x, y) \geq 2 \implies U_n(x', y') <> 1$ pour (x', y') assez proche de (x, y)

3. **a)**pour $k>1$: récurrence double $U_0(kx,ky)=kx\geq x=U_0(x,y)$, $U_1(kx,ky)=ky\geq y=U_1(x,y)$. Si $U_n(kx,ky)\geq$ $kU_n(x,y)$ et $U_{n-1}(kx,ky)\geq kU_{n-1}(x,y)$ alors $\underline{U_n(kx,ky)\geq kU_n(x,y)}$ car pour $k\geq 1$, $k^2\geq k$

   idem si $k<1$ car alors $k^2\leq k$

   b) Si $M\in E_0$ alors $\lim(U_n)=0$ donc à partir d'un certain rang $U_n(x,y)<1$. la question précédente donne pour $k<$ $U_n(kx,ky)<1$ donc d'après I.7$(kx,ky)\in E_0$ .Le résultat est évident si $k=1$ donc $\boxed{\text{le segment } [OM]\in E_0}$

   c) Idem avec plus grand que 1. : $M\in E_\infty\Rightarrow l$la demi droite $[M,...[\in E_\infty$

   d) Si $M\in E_1$: $\lim(U_n(x,y))=1$. soit $k<1$ on a donc $U_n(kx,ky)\leq kU_n(x,y)$. et on finit par l'absurde en passant la limite :

   - $(kx,ky)\in E_1\Rightarrow\lim(U_n(kx,ky)=1\Rightarrow 1\leq k$ absurde
   - $(kx,ky)\in E_\infty\Rightarrow\lim(U_n(kx,ky)=\infty\Rightarrow+\infty\leq k$ absurde

   donc $k<1\Rightarrow(kx,ky)\in E_0$. de même $k>1\Rightarrow(kx,ky)\in E_\infty$

$$\boxed{E_0\cap D=[0,M[\ ,\ E_1\cap D=\{M\}\ ,E_\infty\cap D=]M,...]}$$

4. **a)**

   - O est un point de $D\cap E_0$ donc d'après $II.2$ tout point voisin de O est aussi solution.
   - Si D n'est ni horizontale ni verticale D contient des points vérifiant $x>1$ et $y>1$ donc $U_0(x,y)>1$ et $U_1(x,y)>$ donc $(x,y)\in E_\infty$ toujours $I.7$

     Si D est horizontale on prend $(2,0)$ et on vérifie $U_2(2,0)>1$ et $U_3(2,0)>1$...Idem si D est verticale.
   - d'après $II.3.d$ il y a au plus un point de E_1
   - rq :la figure obtenue au II.1.d montre un morceau de D dans E_0 et un dans E_∞..On peut aussi l'utiliser en justifiar que D coupe C_2 et C_3

   b) Il existe un T tel que $M_T\in E_\infty$. D'après II.3.c on a alors $t\geq T\Rightarrow M_t\in E_\infty\Rightarrow M_t\notin E_0$. T majore - .

   - étant non vide majoré dans $\mathbb{R}$, γ existe bien.

   c) Soit $t<\gamma$. comme $\gamma=\sup(-)$ il existe $t'>t$ et $t'\in -$. donc $M_{t'}\in E_0$ et $M_t\in[O,M_{t'}]$. Donc $M_t\in E_0$ d'aprè II.3.b

   d) Si $M_\gamma\in E_0$ la question II.2 dit que tout point voisin de M_γ est dans E_0 . $\exists\alpha>0$, $|\gamma-t|\leq\alpha\Rightarrow t\in E_0$. E particulier $\gamma+\alpha$ est un point de - strictement plus grand que sup(-)

   Si $M_\gamma\in E_\infty$, il existe $\alpha>0$ tel que $M_{\gamma-\alpha}\in E_\infty$. Or $M_{\gamma-\alpha}\in[0,M_\gamma[$ donc d'après le début du II.4 $M_{\gamma-\alpha}\in E_0$ absurde

   donc d'après la partition du $I.6$ $\boxed{M_\gamma\in E_1}$

5. machine à calculer obligatoire . On prend des valeurs x et on calcule la suite $U_n(x,0)$. si on trouve deux terme consécutifs strictement inférieur à 1 $(x,0)\in E_0$ et $x<\alpha$

   et si on trouve deux termes >1 on a $x>a$.

   On sait déjà (cf le graphe de II.1) $a\in\left[\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}}\right]=[1,41;1,68]$, donc $a=1,4$ ou $1,5$ ou $1,6$ par défaut

   on trouve $U_3(1,5;0)<1$ et $U_5(1,5;0)<1$ donc $1,5<a$ puis $U_4(1,6;0)>1$ et $U_5(1,6;0)>1$ donc $a<1.6$

$$\boxed{a=1,5\text{ à }0,1\text{ par défaut}}$$

6. On complète la figure du $II.1$ Le graphe de E_1 est une courbe comprise entre C_2 et C_3 .

TROISIEME PARTIE

non rédigé

1. pour $n\geq 1$: $U_{n+1}=\frac{U_n^2}{2}+\frac{U_{n-1}^2}{2}\geq\frac{U_n^2}{2}$. on a donc (translation d'indice) pour $n\geq 2$: $\frac{U_{n-1}^2}{2}\leq U_n$ et ... $U_{n+1}\leq\frac{U_n^2}{2}+U$
2. **a)**avec le changement de notation $v_n^2\leq v_{n+1}\leq v_n^2+v_n$. D'où

$$z_{n+1}-z_n=\frac{1}{2^{n+1}}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n^2}\right)\in\left[\ln(1),\frac{1}{2^{n+1}}\ln(1+\frac{1}{v_n})\right]$$

   reste à vérifier $\ln(1+x)\leq x$ pour $x\geq 0$: inégalité de concavité en $(1,0)$ ou étude de $\phi x)=x-\ln(1+x)$

b)Comme (u_n) tend vers $+\infty$, (v_n) tend aussi vers $+\infty$. donc $\sum z_{n+1}-z_n$ est un série à termes positifs les terme étant négligeables devant $\frac{1}{2^{n+1}}$. comme $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ converge on a

$$\boxed{\sum z_{n+1}-z_n \text{ converge}}$$

donc (comparaison suite $\longleftrightarrow$ série) la suite (z_n) converge .

c)on a $L-z_n=\sum_{k=n}^{+\infty}(z_{n+1}-z_n)$. L'encadrement de $z_{n+1}-z_n$ donne $0\leq L-z_n\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{v_k}$. La suite (U_n) cro donc ... la suite $\left(\frac{1}{V_n}\right)$ décroît.

$0\leq L-z_n\leq\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\frac{1}{v_n}=\frac{1}{2^N}\frac{1}{v_n}$ (somme d'une série géométrique)

en revenant à v_n on a

$$M^{(2^n)}e^{-1/v_n}\leq v_n\leq M^{(2^n)}$$

comme $\lim(v_n)=+\infty$ ... $\boxed{u_n\sim 2M^{(2^n)}}$

d) On a $0\leq 2M^{(2^n)}-U_n\leq M^{(2^n)}\left(1-e^{-1/v_n}\right)\leq M^{(2^n)}\frac{1}{v_n}$ car pour $x\geq 0: 1-e^{-x}\leq x$ par concavité de e^{-x} en (0, 1 ou étude de la différence

3. or $M^{(2^n)}\leq v_ne^{1/v_n}$ donc $0\leq 2M^{(2^n)}-U_n\leq e^{1/v_n}\leq e^{1/2}$ car $U_n\geq 4$

4. on a $U_6=1501594$. On a donc $2^6v_6>10^6$ et donc d'après III.2.c $L=z_n$ à 10^{-6} par défaut 10^{-6} : $L=0,211388$ à 10^{-} par défaut

   On a donc $\ln(v_{20})=2^{20}z_{20}$. En négligeant $\frac{1}{2^{20}v_{20}}\leq\frac{1}{2^{20}v_6}\leq 10^{-10}$ on a $z_{20}=L$ et donc $z_{20}\in[0,211388;0,211389]$

   donc $\ln(v_{20})\in[221656,38,221657,44]$, comme $\ln(U_n)=\ln(2)+\ln(v_n)$ et $\ln_{10}(U_{20})=\frac{\ln(U_{20})}{\ln(10)}$ on a $\ln_{10}(U_{20})$ $[96264,34;96264,92]$

$$\boxed{U_{20}\text{ a 96265 chiffres}}$$