

PREMIERE PARTIE

1. a) Soit $U_n = a$ une suite constante alors on a $a = \frac{1}{2}(a^2 + a^2)$ soit $a = 0$ ou $a = 1$.

Réciproquement, les suites constantes égales à 0 ou 1 sont dans S .

b) Si l est une limite finie d'une suite (U_n) de S alors, par passage à la limite dans la relation (\mathcal{R}) on obtient $l^2 = l$.

Comme tous les termes de la suite (U_n) sont positifs, la seule limite infinie possible est $+\infty$.

$$\boxed{l = 0, l = 1 \text{ ou } l = +\infty}$$

c) Si $U_{N-1} = U_N = U_{N+1} = a$ alors, comme à la question a. on a $a = a^2$ donc $a = 0$ ou $a = 1$

Par récurrence double sur $n > N$, $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$ alors $U_{n+2} = \frac{1}{2}(U_{n+1}^2 + U_n^2) = a$. Donc $\forall n \geq N$ $U_n = a$

mais il ne faut pas oublier les $n \leq N$:

Par récurrence décroissante double pour $n \leq N$ si $U_n = a$ et $U_{n+1} = a$ alors $U_{n-1}^2 = 2U_{n+1} - U_n^2 = 2a - a^2 = a^2$ car comme $U_{n-1} \geq 0$ et $a \geq 0$: $U_{n-1} = a$

Si la suite a trois termes consécutifs égaux alors la suite est constante égal à 0 ou à 1

d) Si $U_{n-1} = U_n = 1$ alors on a aussi $U_{n+1} = 1$ et on applique la question précédente.

e) Si $U_n = 0$ avec $n \geq 2$ alors $\frac{1}{2}(U_{n-2}^2 + U_{n-1}^2) = 0$ donc $U_n = U_{n-1} = U_{n-2} = 0$, on applique là aussi la question c.

2. cf figure à la fin

a) $X = 0$ est une droite verticale, $X=Y$ est une droite de pente $\pi/4$, $X^2 + Y^2 - 2Y = X^2 + (Y-1)^2 = 2$ est le cercle de centre $(0, 1)$ de rayon 1.

D'où le domaine définie par les inéquations. On voit que pour $(X, Y) \neq (0, 0)$ $Y \geq 1$

$$\boxed{\left(0 \leq X \leq Y \leq \frac{X^2+Y^2}{2}\right) \implies (Y \geq 1 \text{ ou } X = Y = 0)}$$

par le calcul : $Y \geq X \geq 0 \implies Y^2 \geq X^2$ et donc avec $X^2 + Y^2 \geq 2Y$ on trouve $2Y^2 \geq 2X^2$ donc $Y \geq 1$ ou $Y \leq 0$. Dans le second cas on a $0 \leq X \leq Y \leq 0$ donc $X = Y = 0$

b) On a cette fois ci le cercle de centre $(1, 0)$ de rayon 1

On a maintenant $X^2 \leq Y^2$ donc $2Y^2 \leq 2Y$ donc $Y \in [0, 1]$

$$\boxed{\left(\frac{X^2+Y^2}{2} \leq X \leq Y\right) \implies Y \leq 1}$$

3. On a $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}((U_n^2 + U_{n-1}^2) - (U_{n-1}^2 - U_{n-2}^2)) = \frac{1}{2}(U_n^2 - U_{n-2}^2) = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-2})(U_n + U_{n-2})$. Et comme la suite est à valeurs dans \mathbb{R}^+ on a :

$$\text{sgn}(U_{n+1} - U_n) = \text{sgn}(U_n - U_{n-2}).$$

4. a) Supposons que $U_{N+1} \geq U_N$ et $U_{N+1} > U_{N-1}$ alors, vu la question précédente, on sait que $\text{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) = \text{sgn}(U_{N+1} - U_{N-1})$ et donc $U_{N+2} > U_{N+1} > U_N$.

b) Par récurrence on a alors

$$\forall p \geq N, U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p.$$

En effet si $U_{p+2} \geq U_{p+1} \geq U_p$ alors d'après la question 3) avec $n = p+2$: $U_{p+3} \geq U_{p+2}$ et $U_{p+2} \geq U_{p+1}$ est déjà supposé vrai.

c) Si $U_n = U_{n+1}$ alors (toujours Q3) $U_n = U_{n-2}$, et donc comme la suite est croissante à partir du rang N : pour $n-2 \geq N$ $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$. On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante. Ce qui est exclu par le sujet.

la suite (U_n) est strictement croissante à partir du rang $N+2$

d) On prend $X = U_N, Y = U_{N+1}$ et donc $U_{N+2} = \frac{X^2+Y^2}{2}$ on a donc par croissance $X \leq Y \leq \frac{X^2+Y^2}{2}$ donc $Y = U_{N+1} \geq U_N = U_{N+1} = 0$. le second cas est exclu car la suite n'est pas constante. Donc $U_{N+1} \geq 1$, donc aussi $U_{N+2} \geq 1$. A partir de là la suite est strictement croissante. Elle converge vers $l > 1$ ou elle diverge vers $+\infty$. D'après la question seule la seconde solution est possible.

$$(U_{N+1} \geq U_N \text{ et } U_{N+1} \geq U_{N-1}) \implies \lim(U_N) = +\infty$$

5. Même principe :

a) Supposons que $U_{N+1} \leq U_N$ et $U_{N+1} \leq U_{N-1}$ alors, vu la question précédente, on sait que $\text{sgn}(U_{N+2} - U_{N+1}) = \text{sgn}(U_{N+1} - U_{N-1})$ et donc $\boxed{U_{N+2} < U_{N+1} < U_N}$

b) Par récurrence on a alors

$$\forall p \geq N, U_{p+2} \leq U_{p+1} \leq U_p.$$

c) Si $U_n = U_{n+1}$ alors (toujours Q3) $U_n = U_{n-2}$, et donc comme la suite est décroissante à partir du rang N , pour $n - 2 \geq N$, $U_n = U_{n-1} = U_{n-2}$. On a trois termes consécutifs égaux : la suite est constante. Ce qui est exclu par le sujet.

la suite (U_n) est strictement décroissante à partir du rang N

d) On prend $X = U_{N+1}, Y = U_N$ et donc $U_{N+2} = \frac{X^2 + Y^2}{2}$ on a donc par décroissance $\frac{X^2 + Y^2}{2} \leq X \leq Y$ donc $Y = U_N \leq U_{N+2} \leq 1$ puis une suite qui décroît strictement.. La seule limite possible est 0 (cf question 1) on a

$$\boxed{(U_{N+1} < U_N \text{ et } U_{N+1} < U_{N-1}) \Rightarrow \lim(U_N) = 0}$$

6. a) par l'absurde on suppose $U_0 = U_1$ et on distingue trois cas :

- $U_0 = U_1 = U_2$ alors la suite est constante d'après Q1c), absurde par hypothèse
- $U_0 = U_1 > U_2$ les hypothèses de I4 avec $N = 1$ s'appliquent $\lim(U_n) = +\infty$ absurde par hypothèse
- $U_0 = U_1 < U_2$ les hypothèses de I5 s'appliquent $\lim(U_n) = 0$ absurde par hypothèse

b) même principe : ($n \geq 2$ pour que U_{n-2} existe)

- si $U_n = U_{n-1}$ la méthode du a) prouve que c'est absurde en prenant les 3 cas pour U_{n+2} : donc $U_n \neq U_{n-1}$
- si $U_n < U_{n-1}$ et si $U_n \leq U_{n-2}$ alors $\lim(U_n) = 0$ en prenant $N = n - 1$ dans la question 5::donc $U_n < U_{n-1} = U_{n-2} < U_n < U_{n-1}$
- de même avec la question 4 $U_n > U_{n-1} \Rightarrow U_{n-2} > U_n > U_{n-1}$

pour $n > 2$, U_n est strictement compris entre U_{n-2} et U_{n-1}

c) On applique par récurrence la question précédente :

- U_2 est strictement compris entre U_0 et U_1 donc $U_0 < U_2 < U_1$
- U_3 est strictement compris entre U_1 et U_2 donc $U_0 < U_2 < U_3 < U_1$
- U_4 est strictement compris entre U_2 et U_3 donc $U_0 < U_2 < U_4 < U_3 < U_1$
- On suppose que pour p fixé $U_0 < U_2 < \dots < U_{2p} < U_{2p+1} < \dots < U_1$
alors comme U_{2p+2} est strictement compris entre U_{2p} et U_{2p+1} , puis comme U_{2p+3} est strictement compris entre U_{2p+1} et U_{2p+2} on a :

$$U_0 < U_2 < \dots < U_{2p} < U_{2p+2} < U_{2p+3} < U_{2p+1} < \dots < U_1$$

La suite des termes paires est croissante majorée par U_1 elle converge vers $\lambda > 0$ (car $\lambda \geq U_2 > U_0 \geq 0$)

La suite des termes impairs est décroissante minorée par 0 donc elle converge vers μ

Comme $U_{2n+1} = \frac{U_{2n}^2 + U_{2n-1}^2}{2}$ on a $\mu = \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2}$ et de même $\lambda = \frac{\mu^2 + \lambda^2}{2}$ donc $\lambda = \mu > 0$ et donc en reportant $\lambda^2 = \lambda$ et $\lambda > 0$ donc $\lambda = 1$

Remarque : je n'arrive pas à utiliser directement le théorème des suites adjacentes en prouvant $\lim(U_{2n+1} - U_{2n}) = 0$

d) parfaitement symétrique avec (U_{2n}) décroissante strictement, (U_{2n+1}) croissante strictement et $\mu > 0$

si la suite non constante ne converge pas vers 0 et ne diverge pas vers $+\infty$, elle converge vers 1

remarqu : comme une suite (U_n) constante qui ne converge pas vers 0 converge vers 1, le résultat peut-être étendu.

e) On prend un $(x, y) \in Q$ et on sépare les cas pour la suite (U_n) :

- (U_n) est constante égale à 0 : $\lim(U_n) = 0$ et $(x, y) \in E_0$
- (U_n) est constante égale à 1 : $\lim(U_n) = 1$ et $(x, y) \in E_1$
- (U_n) est non constante de limite nulle : $(x, y) \in E_0$
- (U_n) est non constante de limite infinie : $(x, y) \in E_\infty$

- (U_n) est non constante de limite ni nulle ni infinie alors d'après le début de cette question $\lim(U_n) = 1: (x, y) \in E$
On a vu tous les cas possibles :

$$\boxed{Q = E_0 \cup E_1 \cup E_\infty}$$

7. a) Si $U_N > 1$ et si $U_{N+1} > 1$ une récurrence double donne $n \geq N \implies u_n > 1$ et donc la suite n'est pas constante et ne peut pas converger vers 0.

Si elle ne converge pas vers $+\infty$ la question précédente s'applique et donc les termes de la suite sont alternativement plus petit et plus grand que la limite 1. Absurde car on a deux termes consécutifs strictement plus grand que 1.

b) idem car $n \leq N \implies u_n < 1$ on a donc soit la suite constante nulle (qui tend vers 0) soit une suite non constante et on utilise la question 6.

On a donc une description de la position de U_n par rapport à 1 qui va toujours servir:

- si deux termes consécutifs sont > 1 la suite diverge vers $+\infty$
- si deux termes consécutifs sont < 1 la suite converge vers 0
- si la suite oscille autour de 1 elle converge vers 1
- il n'y a pas d'autres cas possibles.

DEUXIEME PARTIE

1. figures en annexe

a) $U_2(x, y) = 1 \iff x^2 + y^2 = 2$, cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

b) $U_3(x, y) = 1 \iff \frac{1}{2} \left(y^2 + \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 \right) \iff 4y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 8 \iff (x^2 + y^2) = \sqrt{8 - 4y^2}$ et $y \leq \sqrt{2} \iff x^2 \leq \sqrt{8 - 4y^2} - y^2$ et $y \leq \sqrt{2}$ (car $y \geq 0$)

On doit avoir $\sqrt{8 - 4y^2} - y^2 \geq 0$ ce qui équivaut à $\sqrt{8 - 4y^2} \geq y^2$. comme tout est positif on étudie $8 - 4y^2 \geq y^4$ so $y^4 + 4y^2 - 8 \leq 0$ on résout $Y^2 + 4Y - 8 = 0: y \leq \sqrt{2\sqrt{3} - 2}$

On a donc :

$$U_3(x, y) = 1 \iff x = \sqrt{\sqrt{8 - 4y^2} - y^2} \text{ et } 0 \leq y \leq \sqrt{2\sqrt{3} - 2}$$

On peut constater sans calcul de dérivée que h décroît : $y - \sqrt{4y^2}$ décroît et $\sqrt{\quad}$ croit donc $y - \sqrt{8 - 4y^2}$ décroît ...

On doit calculer h' pour préciser les tangentes :

$$h'(y) = \frac{\frac{-4y}{\sqrt{8-4y^2}} - 2y}{2h(y)}$$

d'où $h(0) = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $h'(0) = 0$, $h(\sqrt{2\sqrt{3} - 2}) = 0$ avec une tangente verticale. D'où le graphe de h et celui de C_3 par symétrie par rapport à la première bissectrice.

c) L'intersection de C_2 et C_3 est obtenue pour $U_2 = U_3 = 1$, donc (11d) pour la suite constante égale à 1 : $C_2 \cap C_3 = \{(1, 1)\}$

d) tout point à l'intérieur de C_2 et C_3 vérifie $U_2 < 1$ et $U_3 < 1$ donc est dans E_0 d'après I7. de même tout point extérieur aux deux surfaces est dans E_∞ .

2. a) récurrence double : U_0 et U_1 sont continues et si U_{n-1} et U_n sont continues U_{n+1} est continue comme produit et combinaison linéaire de fonctions continues.

b) Si la suite $(U_n(x, y))$ converge vers 0 tous ses termes à partir d'un certain rang sont plus petit que $1/2$: $\exists N \geq N \implies U_n(x, y) \leq 1/2$. par continuité de la fonction U_N on a donc $U_N(x', y') < 1$ pour tout point (x', y') assez proche de (x, y) et de même pour U_{N+1} . Donc d'après I.7 $(U_n(x', y'))$ converge vers 0.

remarque : avec le cours de sup sur les fonctions de deux variables on peut améliorer la rédaction avec des quantificateur

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \sup(|x - x'|, |y - y'|) \leq \eta \implies (x', y') \in E_0$$

idem pour E_∞ $n > N \implies U_n(x, y) \geq 2 \implies U_n(x', y') < 1$ pour (x', y') assez proche de (x, y)

3. a) pour $k > 1$: récurrence double $U_0(kx, ky) = kx \geq x = U_0(x, y)$, $U_1(kx, ky) = ky \geq y = U_1(x, y)$. Si $U_n(kx, ky) \geq kU_n(x, y)$ et $U_{n-1}(kx, ky) \geq kU_{n-1}(x, y)$ alors $\underline{U_n(kx, ky) \geq kU_n(x, y)}$ car pour $k \geq 1$, $k^2 \geq k$

idem si $k < 1$ car alors $k^2 \leq k$

b) Si $M \in E_0$ alors $\lim(U_n) = 0$ donc à partir d'un certain rang $U_n(x, y) < 1$. la question précédente donne pour $k < 1$ $U_n(kx, ky) < 1$ donc d'après I.7 $(kx, ky) \in E_0$. Le résultat est évident si $k = 1$ donc $\boxed{\text{le segment } [OM] \in E_0}$

c) Idem avec plus grand que 1. : $M \in E_\infty \Rightarrow$ la demi droite $[M, \dots] \in E_\infty$

d) Si $M \in E_1$: $\lim(U_n(x, y)) = 1$. soit $k < 1$ on a donc $U_n(kx, ky) \leq kU_n(x, y)$. et on finit par l'absurde en passant la limite :

- $(kx, ky) \in E_1 \Rightarrow \lim(U_n(kx, ky)) = 1 \Rightarrow 1 \leq k$ absurde
- $(kx, ky) \in E_\infty \Rightarrow \lim(U_n(kx, ky)) = \infty \Rightarrow +\infty \leq k$ absurde

donc $k < 1 \Rightarrow (kx, ky) \in E_0$. de même $k > 1 \Rightarrow (kx, ky) \in E_\infty$

$$\boxed{E_0 \cap D =]0, M[, E_1 \cap D = \{M\} , E_\infty \cap D =]M, \dots[}$$

4. a)

- O est un point de $D \cap E_0$ donc d'après II.2 tout point voisin de O est aussi solution.
- Si D n'est ni horizontale ni verticale D contient des points vérifiant $x > 1$ et $y > 1$ donc $U_0(x, y) > 1$ et $U_1(x, y) > 1$ donc $(x, y) \in E_\infty$ toujours I.7
Si D est horizontale on prend $(2, 0)$ et on vérifie $U_2(2, 0) > 1$ et $U_3(2, 0) > 1$...Idem si D est verticale.
- d'après II.3.d il y a au plus un point de E_1
- rq : la figure obtenue au II.1.d montre un morceau de D dans E_0 et un dans E_∞ ..On peut aussi l'utiliser en justifiant que D coupe C_2 et C_3

b) Il existe un T tel que $M_T \in E_\infty$. D'après II.3.c on a alors $t \geq T \Rightarrow M_t \in E_\infty \Rightarrow M_t \notin E_0$. T majore - .

- étant non vide majoré dans \mathbb{R} , γ existe bien.

c) Soit $t < \gamma$. comme $\gamma = \sup(-)$ il existe $t' > t$ et $t' \in -$. donc $M_{t'} \in E_0$ et $M_t \in [O, M_{t'}]$. Donc $M_t \in E_0$ d'après II.3.b

d) Si $M_\gamma \in E_0$ la question II.2 dit que tout point voisin de M_γ est dans E_0 . $\exists \alpha > 0$, $|\gamma - t| \leq \alpha \Rightarrow t \in E_0$. En particulier $\gamma + \alpha$ est un point de - strictement plus grand que $\sup(-)$

Si $M_\gamma \in E_\infty$, il existe $\alpha > 0$ tel que $M_{\gamma-\alpha} \in E_\infty$. Or $M_{\gamma-\alpha} \in [0, M_\gamma[$ donc d'après le début du II.4 $M_{\gamma-\alpha} \in E_0$ absurde

donc d'après la partition du I.6 $\boxed{M_\gamma \in E_1}$

5. machine à calculer obligatoire . On prend des valeurs x et on calcule la suite $U_n(x, 0)$. si on trouve deux termes consécutifs strictement inférieur à 1 $(x, 0) \in E_0$ et $x < \alpha$

et si on trouve deux termes > 1 on a $x > a$.

On sait déjà (cf le graphe de II.1) $a \in [\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}] = [1, 41; 1, 68]$, donc $a = 1, 4$ ou $1, 5$ ou $1, 6$ par défaut

on trouve $U_3(1, 5; 0) < 1$ et $U_5(1, 5; 0) < 1$ donc $1, 5 < a$ puis $U_4(1, 6; 0) > 1$ et $U_5(1, 6; 0) > 1$ donc $a < 1, 6$

$$\boxed{a = 1, 5 \text{ à } 0, 1 \text{ par défaut}}$$

6. On complète la figure du II.1 Le graphe de E_1 est une courbe comprise entre C_2 et C_3 .

TROISIEME PARTIE

non rédigé

1. pour $n \geq 1$: $U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2} + \frac{U_{n-1}^2}{2} \geq \frac{U_n^2}{2}$. on a donc (translation d'indice) pour $n \geq 2$: $\frac{U_{n-1}^2}{2} \leq U_n$ et ... $U_{n+1} \leq \frac{U_n^2}{2} + U_n$

2. a) avec le changement de notation $v_n^2 \leq v_{n+1} \leq v_n^2 + v_n$. D'où

$$z_{n+1} - z_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(\frac{v_{n+1}}{v_n^2} \right) \in \left[\ln(1), \frac{1}{2^{n+1}} \ln \left(1 + \frac{1}{v_n} \right) \right]$$

reste à vérifier $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$: inégalité de concavité en $(1, 0)$ ou étude de $\phi(x) = x - \ln(1+x)$

b) Comme (u_n) tend vers $+\infty$, (v_n) tend aussi vers $+\infty$. donc $\sum z_{n+1} - z_n$ est une série à termes positifs les termes étant négligeables devant $\frac{1}{2^{n+1}}$. comme $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ converge on a

$$\boxed{\sum z_{n+1} - z_n \text{ converge}}$$

donc (comparaison suite \longleftrightarrow série) la suite (z_n) converge.

c) on a $L - z_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (z_{k+1} - z_k)$. L'encadrement de $z_{n+1} - z_n$ donne $0 \leq L - z_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{v_k}$. La suite (U_n) croît donc ... la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)$ décroît.

$$0 \leq L - z_n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{v_n} \text{ (somme d'une série géométrique)}$$

en revenant à v_n on a

$$M^{(2^n)} e^{-1/v_n} \leq v_n \leq M^{(2^n)}$$

comme $\lim(v_n) = +\infty \dots \boxed{u_n \sim 2M^{(2^n)}}$

d) On a $0 \leq 2M^{(2^n)} - U_n \leq M^{(2^n)} (1 - e^{-1/v_n}) \leq M^{(2^n)} \frac{1}{v_n}$ car pour $x \geq 0 : 1 - e^{-x} \leq x$ par concavité de e^{-x} en $(0, 1)$ ou étude de la différence

3. or $M^{(2^n)} \leq v_n e^{1/v_n}$ donc $0 \leq 2M^{(2^n)} - U_n \leq e^{1/v_n} \leq e^{1/2}$ car $U_n \geq 4$

4. on a $U_6 = 1501594$. On a donc $2^6 v_6 > 10^6$ et donc d'après III.2.c $L = z_n$ à 10^{-6} par défaut $10^{-6} : L = 0,211388$ à 10^{-6} par défaut

On a donc $\ln(v_{20}) = 2^{20} z_{20}$. En négligeant $\frac{1}{2^{20} v_{20}} \leq \frac{1}{2^{20} v_6} \leq 10^{-10}$ on a $z_{20} = L$ et donc $z_{20} \in [0,211388; 0,211389]$

donc $\ln(v_{20}) \in [221656,38, 221657,44]$, comme $\ln(U_n) = \ln(2) + \ln(v_n)$ et $\ln_{10}(U_{20}) = \frac{\ln(U_{20})}{\ln(10)}$ on a $\ln_{10}(U_{20}) \in [96264,34; 96264,92]$

$$\boxed{U_{20} \text{ a } 96265 \text{ chiffres}}$$