EPITA 2003 MP option

1. • $u_0=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}dt=\pi$, $u_1=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(t)dt=[\sin(t)]_{-\pi/2}^{\pi/2}=2$, $u_2=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}$

 • On intègre par partie en posant $\cos^{n+1}(t)=\cos^n(t).\cos(t)$ les fonctions $\cos^n(t)$ et $\sin(t)$ étant $\boxed{C^1}$ sur le segment

$$\begin{aligned}(n+1)\,u_{n+1}&=(n+1)\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n(t)\,(\cos(t)dt)=(n+1)\,n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{n-1}(t)\sin^2(t)dt\\&=(n+1)\,n\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{n-1}(t)\left(1-\cos^2(t)\right)dt=(n+1)n\,(u_{n-1}-u_{n+1}))\end{aligned}$$

 d'où le résultat :

$$\boxed{\forall n\geq 1:\ (n+1)\,u_{n+1}=nu_{n-1}}$$

 • En multipliant par u_n on a donc que la suite $((n+1)u_{n+1}u_n)_{n\geq 0}$ est constante. Sa valeur en 0 étant $\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ \ ,\ (n+1)\,u_nu_{n+1}=\pi/2}$$

 • Comme les bornes sont dans le bon sens, on peut intégrer l'inégalité : $\cos^n(t)\geq\cos^{n+1}(t)$

$$u_{n+1}\leq u_n$$

 • On a donc $nu_n^2\leq nu_nu_{n-1}=\frac{\pi}{2}$ et $(n+1)^2u_n\geq(n+1)\,u_nu_{n+1}=\frac{\pi}{2}$ (on peut multiplier les inégalités car nu_n e $(n+1)\,u_n$ sont $\boxed{\text{positifs}}$) . D'où l'encadrement

$$\boxed{nu_n^2\leq 2\pi\leq(n+1)u_n^2)}$$

 • On peut transformer et dire , les quantités sous le radical étant $\boxed{\text{positives}}$:

$$\sqrt{\frac{2\pi}{(n+1)}}\leq u_n\leq\sqrt{\frac{2\pi}{n}}$$

 par encadrement

$$\boxed{u_n\sim\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

2. • 0n écrit la relation de Chasles puis on fait le changement de variable $x=\sqrt{n}\sin(t)$ $\boxed{C^1\text{ bijectif}}$ de $[-\pi/2,\pi/2]$ su $[-\sqrt{n},\sqrt{n}]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx=0+\int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}}f_n(x)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}(t)\left(\sqrt{n}\cos(t)dt\right)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n+1}(t)\sqrt{n}dt$$

 • On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)dx=\sqrt{n}I_{2n+1}\sim\sqrt{n}\sqrt{\frac{2\pi}{2n+1}}\sim\sqrt{\pi}$

$$\boxed{\lim_{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(t)dt\right)=\sqrt{\pi}}$$

3. • Pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq N\Longrightarrow|x|\leq\sqrt{n}$ (par exemple $E\left(x^2\right)+1$) .
 Pour $n\geq N$ on a

$$f_n(x)=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)$$

 l'équivalent $\ln(1+u)\sim_0 u$ donne $\lim\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)=-x^2$ et donc $\lim\left(f_n(x)\right)=e^{-x^2}$.

 • $\ln(1-u)\leq -u$ par variation de $u->u+\ln(1-u)$ sur $[0,1[$ ou par concavité de $t->\ln(t)$ sur $]-1,0]$
 On a donc (on multiplie l'inégalité par $n\geq 0$ et on compose par exp croissante)

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ f_n(x)\left\{\begin{array}{l}=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)\leq\exp(n.\left(\frac{-x^2}{n}\right)=f(x)\text{ si }|x|\leq\sqrt{n}\\ \boxed{=0\leq f(x)si\,|x|>\sqrt{n}}\end{array}\right.$$

$$\boxed{f_n(x)<f(x)}$$

- On vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée :
  -> la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f continue par morceaux.
  -> pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}$
  -> on a domination : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ |f_n(x)| \leq f(x)$ indépendante de n continue par morceaux intégrable sur $\mathbb{R}$.

  seule la dernière propriété doit être précisée : $t->e^{-t^2}$ est continue positive sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{\pm\infty}\left(t^2 f(t)\right) = 0$
- donc par convergence dominée

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt\right) = \sqrt{\pi}}$$

4.

- Comme intégrale d'une fonction continue positive , strictement positive en un point $\boxed{u_n \neq 0}$ on peut utiliser la règle de D'Alembert pour $x \neq 0$

$$\lim\left|\frac{u_{n+1}x^{n+1}}{u_n x^n}\right| = |x|$$

  en prenant l'équivalent du 1e) . donc $R = 1$
- si $x = 1$ $u_n \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{1/2}} \geq 0$, donc la série diverge car $1/2 < 1$
- si $x = -1$ $\sum(-1)^n u_n$ est une série de signe alterné dont la valeur absolue décroît vers 0 (1d et 1e). Donc d'après le critère spécial la série converge .

$$\boxed{D = [-1, 1[}$$

- Comme la somme est finie on peut intégrer termes à termes, ce qui donne la somme d'une suite géométrique de $\boxed{\text{raison } x.\cos(t) \neq 1}$ car si $|x| < 1$ alors $|x.\cos(t)| < 1$ et si $x = -1$ $x\cos(t) \leq 0$

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{k=0}^{n-1} (x.\cos(t))^k \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-(x.\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}dt$$

- Pour $|x| < 1$ on utilise le théorème de convergence dominée à $g_n(t) = \frac{(x.\cos(t))^n}{1-x\cos(t)}$:
  -> $\forall n$: g_n est continue donc intégrable sur le segment
  -> (g_n) converge simplement vers 0 continue
  -> $|g_n| \leq \frac{1}{1-x\cos(t)}$ indépendante de n , continue sur le segment donc intégrable

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dt}{1-x\cos(t)}}$$

- pour $x = -1$ on fait un prolongement par continuité :
  -> la somme de la série entière est continue en -1 car la série converge par théorème de continuité d'une série entière au bord du disque de convergence.
  -> l'intégrale à paramètre est continue sur $[-1, 0]$ car $\left\{\begin{array}{l} x->\frac{1}{1-x\cos(t)} \text{ est continue sur } [-1,0] \\ t->\frac{1}{1-x\cos(t)} \text{ est continue sur le segment donc intégrable} \\ \left|\frac{1}{1-x\cos(t)}\right| \leq 1 \text{ intégrable sur le segment} \end{array}\right.$

  par continuité les deux quantités sont égales en -1 .
  (On peut aussi majorer)
- Le changement de variable $u = \tan(t/2)$ est C^1 bijectif de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$ et donne

$$S(x) = \int_{-1}^{1} \frac{2du}{(1-x)+(1+x)u^2}$$

  $->$ si $x = -1$ il reste $S(x) = \int_{-1}^{1} du = 2$
  $-->$si $|x| < 1$

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{2}{1-x}\int_{-1}^{1} \frac{du}{1-\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}u\right)^2} = \frac{2}{1-x}\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}u\right)\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}$$