EXERCICE

algorithme de Babylone
d'après EIA 2003

1. Partie

Dans tout cette partie on considère un réel a strictement positif..Le but de cette partie est de définir une suite de réels q
converge très rapidement vers $\sqrt{a}$

On considère la fonction définie par

$$\forall x > 0 \ , \ f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

et la suite définie par la relation de récurrence : $u_0 > 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Etudiez les variations de f .Tracer le graphe de f en précisant les asymptotes.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

   En déduire la convergence puis la limite de suite (u_n).
4. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en $t = 0$ de la fonction

   $$t- > f\left(\sqrt{a} + t\right)$$

   On pose désormais

   $$u_n = \sqrt{a} + \alpha_n$$
5. Montrer que au voisinage de $n = +\infty$

   $$\alpha_{n+1} \sim \frac{\alpha_n^2}{2\sqrt{a}}$$
6. Montrer que la série $\sum 2^n \alpha_n$ converge.

   En déduire que au voisinage de $n = +\infty$: $\alpha_n << 2^{-n}$
7. Montrer que au voisinage de $n = +\infty$: $\alpha_n << \frac{1}{n!}$

2. PARTIE

On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

On définit la suite(sous réserve d'existence):

$$M_0 = A \ , \forall n \in \mathbb{N} \ , \ M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + AM_n^{-1}\right)$$

Montrer que la suite (M_n) converge et calculer sa limite.