E.P.I.T.A.

Concours 2003 – Mathématiques, option (1 heure 30)

Dans ce problème, on étudie les intégrales $u_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt$ où $n \in \mathbf{N}$ et $G = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx$.

1°) Dans cette question, on étudie la suite (u_n) pour $n \in \mathbf{N}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2.

b) Etablir à l'aide d'une intégration par parties que $(n+1)u_{n+1} = nu_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

c) En déduire que la suite $n \to (n+1)u_{n+1}u_n$ est constante, et préciser la valeur de cette constante.

d) Etudier le sens de variation de la suite (u_n), puis en déduire que $nu_n^2 \leq 2\pi \leq (n+1)u_n^2$.

e) En déduire la limite et un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

2°) Dans cette question, on étudie les intégrales des fonctions f_n définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } -\sqrt{n} \leq x \leq \sqrt{n} \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

a) Etablir les égalités suivantes : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\sqrt{n}}^{+\sqrt{n}} f_n(x)dx = \sqrt{n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)dt$.

b) A l'aide de l'équivalent obtenu à la question 1, en déduire $\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx$.

3°) Dans cette question, on étudie l'intégrale de la limite de la suite de fonctions (f_n).

a) Déterminer pour tout nombre réel x la limite $f(x)$ de la suite $(f_n(x))$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Justifier l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$ pour tout nombre réel positif u.
En déduire l'inégalité $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout nombre réel x.

c) Etablir à l'aide du théorème de convergence dominée dont on rappellera l'énoncé que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

d) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx$.

4°) Dans cette question, on étudie la série génératrice des nombres u_n, définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n.$$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

b) Etudier la nature des séries $\sum u_n$ et $\sum(-1)^n u_n$, et en déduire le domaine de définition D de S.

c) Etablir la formule suivante pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel $x \in D$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos(t)} - x^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n(t)dt}{1 - x\cos(t)}.$$

d) En déduire l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos(t)}$ pour $|x| < 1$, puis pour $x = -1$.

e) Calculer $S(-1)$, puis $S(x)$ pour $|x| < 1$ à l'aide du changement de variables $u = \tan(\frac{t}{2})$.

***