Concours E3A 2005
Math A - PC

Partie I

I.1 $T_0 = 1, T_1(X) = X, T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

I.2 $\boxed{\text{Pour } m = 0\ T_m \text{ est de degré } 0 \text{ , de coefficient dominant } 1 \text{ et paire}}$

Montrons par récurrence double sur $m \geq 1$ que T_m est un polynôme de degré m , de coefficient dominant 2^{m-1} si $m \geq 1$ et vérifiant de plus $T_m(-X) = (-1)^m T_m(X)$ (et donc T_m a la parité de m).

- C'est vérifié pour $m = 1, 2, 3$.
- On suppose la propriété vraie pour $m-1$ et m. On a $T_{m+1}(X) = 2XT_m(X) - T_{m-1}(X)$
  - on a $d^\circ(T_{m-1}) = m - 1 \neq m + 1 = d^\circ(2XT_m)$, donc T_{m+1} est de degré $m + 1$
  - son coefficient dominant provient uniquement du facteur $2XT_m$ donc c'est 2^m.
  - $T_{m+1}(-X) = -2XT_m(-X) - T_{m-1}(-X) = (-1)^{m+1}T_{m+1}(X)$.
- La propriété est vraie au rang $m + 1$, elle est donc vraie pour tout m.

$$\boxed{\forall\ m \geq 1,\ T_m \text{ est un polynôme de degré } m \text{ , de coefficient dominant } 2^{m-1} \text{ ayant la parité de } m}$$

attention au cas particulier $m = 0$

I.3 La famille $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est composée de polynômes ayant des degrés deux à deux distincts, elle est donc libre; les polynômes T_n sont dans $\mathbb{R}_n[X]$.; enfin $card(T_i)_{i=0}^n = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$,

$$\boxed{(T_i)_{i=0}^n \text{ est donc une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

I.4 a) Montrons par récurrence sur n que $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ et $T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)$

- C'est vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ et n. On sait que $\cos(nx + x) + \cos(nx - x) = 2\cos(nx)\cos(x)$ et $\operatorname{ch}(nx + x) + \operatorname{ch}(nx - x) = 2\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}(x)$ donc

$$\begin{aligned} \cos(nx + x) &= 2\cos(x)T_n(\cos x) - T_{n-1}(\cos x) = T_{n+1}(\cos x) \\ \operatorname{ch}(nx + x) &= 2\operatorname{ch}(x)T_n(\operatorname{ch} x) - T_{n-1}(\operatorname{ch} x) = T_{n+1}(\operatorname{ch} x) \end{aligned}$$

- La propriété est vraie pour $n + 1$, elle est donc vraie pour tout n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } T_n(\cos x) = \cos(nx) \text{ et } T_n(\operatorname{ch} x) = \operatorname{ch}(nx)}$$

b) Si $|x| \leq 1$ il existe θ tel que $x = \cos(\theta)$ donc $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos(n\theta)| \leq 1$.

c) Si $x > 1$ il existe $\theta > 0$ tel que $u = ch(\theta)$ donc $|T_n(\theta)| = |T_n(ch(\theta))| = ch(n\theta) > 1$ puisque $n\theta > 0$.

d) Si $x < -1$, $-x > 1$ donc $|T_n(x)| = |(-1)^n T_n(-x)| = |T_n(-x)| > 1$.

$$\boxed{|x| \leq 1 \Rightarrow |T_n(x| \leq 1 \text{ , } |x| > 1 \Rightarrow |T_n(x| > 1}$$

I.5 a) $T_n(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(nx) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in [[0, n-1]] \text{ , } nx = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Longleftrightarrow \exists k \in [[0, n-1]] \text{ , } x = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$

b) Les nombres $\cos(\dfrac{2k+1}{2n}\pi)$ pour $0 \leq k \leq n-1$ sont deux à deux distincts et compris entre -1 et 1 . T_n a donc n racines distinctes dans $[-1, 1]$.

c) On a trouvé n racines distinctes d'un polynôme de degré n . il n'a pas d'autres racines et toutes les racines sont simples

$$\boxed{\text{pour } n \geq 1 \text{ , } T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)}$$

I.6 On a une série géométrique de raison $q = te^{ix}$ vérifiant $|q| < 1$ donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} t^n e^{inn} = \frac{1}{1-te^{ix}}}$$

On en prend les parties réelles et imaginaires:

$$\frac{1}{1-te^{ix}} = \frac{1-te^{-ix}}{(1-te^{ix})(1-te^{-ix})} = \frac{1-t\cos x + i\sin x}{1-2t\cos x + t^2}$$

et donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cos nx = \frac{1-t\cos x}{1-2t\cos x+t^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \sin nx = \frac{t\sin x}{1-2t\cos x+t^2}}$$

$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(X-\cos(x_k))$ avec la numérotation des racines du sujet.

Partie II.A

II.A.2) a) On peut écrire puisque $p \neq q$ et $p \neq -q$:

$$\begin{aligned}
< T_p, T_q > &= \int_0^\pi T_p(\cos x)T_q(\cos x)dx = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)dx && \text{d'après } I.4.a \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((p+q)dx) + \cos((p-q)x)dx && \text{formule de trigonométrie} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((p+q)x)}{p+q} + \frac{\sin((p-q)x)}{p-q}\right]_0^\pi && \text{car } \begin{cases} p \neq q \text{ par hypothèse} \\ p \neq -q \text{ car sinon } p = q = 0 \end{cases} \\
&= 0 && \text{car } p \text{ et } q \text{ sont entiers}
\end{aligned}$$

b)

$$< T_0, T_0 >= \pi$$

et pour $n \geq 1$

$$< T_n, T_n >= \int_0^\pi (\cos(nx))^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(2nx)+1)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2nx)}{2n} + x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

c) la famille $(T_k)_{k=0}^{n-1}$ forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc tout polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ se décompose dans cette base: $P = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k T_k$. Alors par linéarité de l'intégrale:

$$< P, T_n >= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k \int_0^\pi T_k(\cos x)T_n(\cos x)\,dx = 0$$

d) de même pour $n \geq 1$:$X^n = \lambda_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k T_k$ et donc $< X^n, T_n >= \frac{\pi}{2}\lambda_n = \frac{\pi}{2^n}$ d'après $I2$.

et $< X^0, T_0 >= \int_0^\pi dx = \pi$ et la formule précédente reste vraie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \text{ , } < X^n, T_n >= \frac{\pi}{2^n}}$$

Partie II.B

II.B.1

a) $c_0 = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$

b) Pour $j \in [[1, n-1]]$ on a une somme géométrique de raison $e^{ij\frac{\pi}{n}} \neq 1$ et donc :$S_k = \sum_{k=1}^{n} (^{ij\frac{\pi}{n}})^k = e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1-e^{ij\pi}}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}} =$
$e^{ij\frac{\pi}{n}} \frac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}}$

c) c_j est la partie réelle de

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ijx_k} = e^{-ij\frac{\pi}{2n}} S_k = e^{ij\frac{\pi}{2n}} \frac{1-(-1)^j}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}}$$

or

$$\frac{e^{ij\frac{\pi}{2n}}}{1-e^{ij\frac{\pi}{n}}} = \frac{1}{e^{-ij\frac{\pi}{2n}} - e^{ij\frac{\pi}{2n}}} \text{ est un imaginaire pur}$$

$$\boxed{c_0 = n \text{ et } \forall\, j \in [[1, n-1]]\ ,\ c_j = 0}$$

II.B.2

a) D'après le $II.A.2$: $I(T_p) =< T_p, T_0 >= \pi$ si $p = 0$ et 0 si $p > 0$.

$$S_n(T_p) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} T_p(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos(px_k) = \frac{\pi}{n} c_p$$

d'où $S_n(T_p) = \pi$ si $p = 0$ et 0 si $0 < p \leq n-1$. On a donc

$$\boxed{\forall p \in [[0, .., n-1]]\, , I(T_p) = S_n(T_p)}$$

b) I et S_n sont des applications linéaires égales sur la base $(T_0, T_1, ..., T_{n-1})$, elles sont égales.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ I(P) = I(R)}$$

II.B.3 a) Si $Q = 0$ $d^\circ Q \leq n-1$ et si $Q \neq 0$, $\deg(QT_n) \geq n \neq \deg(R) \leq n-1$; par suite, $\deg(QT_n) = \deg(P) \leq 2n-1$ donc $\deg(Q) \leq n-1$.

b) $I(P) = I(QT_n) + I(R) =< Q, T_n > +I(R) = 0 + I(R) = I(R)$ d'après $II.A.2.c)$

c) $S_n(P) = S_n(QT_n) + S_n(R)$ or

$$S_n(QT_n) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} Q(\cos(x_k))T_n(\cos(x_k)) = 0$$

car les $\cos(x_k)$ sont les racines de T_n. On a donc $S_n(P) = S_n(R)$ et donc en utilisant que $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et donc que $I(R) = S_n(R)$

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], I(P) = S_n(P)}$$

II.B.4

- $I(T_{2n}) =< T_{2n}, T_0 >= 0$ car $n \geq 1$.
- $S_n(T_{2n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} T_{2n}(\cos(x_k)) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos(2nx_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1) = -\pi.$
- On en déduit que $\boxed{I(P) = S_n(P) \text{ n'est pas vérifié pour un polynôme de degré } 2n}$

Partie III

Le théorème admis est une généralisation du cas particulier du théorème du cours dans le quel $c_k = \alpha_k$ ou $c_k = \alpha_{k+1}$

III.1 On choisit $a = 0$, $b = \pi$ et la fonction $f \circ \cos$ qui est continue sur $[0, \pi]$. Avec $p = n$ et $c_k = x_{k+1} = \frac{2k+1}{2n}\pi \in [\frac{k}{n}\pi, \frac{k+1}{n}\pi]$ on obtient par le théorème des sommes de Riemann:

$$\boxed{\lim_{n \mapsto +\infty} S_n(f) = \int_0^{\pi} f(\cos t) t = I(f)}$$

III.2

a) Le ln est défini continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ il faut donc justifier : $(a>0$ et $a\neq 1) \Longrightarrow \forall t\in[-1,1]\ a^2-2at+1>0$:
$a^2-2at+1=((a-t)^2+1-t^2)$

- si $t\in]-1,1[$ on ajoute un réel positif et un réel strictement positif.
- pour $t=1$, $(a-1)^2>0$ car $a\neq 1$
- pour $t=-1$, $(a+1)^2>0$.

$$\boxed{f \text{ est donc continue sur } [-1,1]}$$

. On peut donc appliquer la question précédente.

b)

i. $z^{2n}=-1 \Leftrightarrow z=e^{(2k-1)i\frac{\pi}{2n}}=z_k$ avec $1\leq k\leq 2n$.

- pour $k\in[[1,n]]$ $z_k=e^{ix_k}$
- pour $k\in[[n+1,2n]]$ $\bar{z}_k=e^{-(2k-1)i\frac{\pi}{2n}}=e^{((4n-2k+1)i\frac{\pi}{2n}}=z_{2n-k+1}$ et $2n-k+1\in[[1,n]]$ et donc $z_{2n}=\bar{z}_1$, ..., $z_{n+1}=\bar{z}_n$

$$\boxed{\text{les racines de } X^{2n}-1 \text{ sont les } e^{ix_k} \text{ et } e^{-ix_k} \text{ pour } k\in[[1,n]]}$$

.

ii. $X^{2n}+1=\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left((X-e^{ix_k})(X-e^{-ix_k})\right)$.

iii. On regroupe les termes conjugués : $(X-e^{ix_k})(X-e^{-ix_k})=X^2-2\cos(x_k)X+1$ On obtient bien la factorisation proposée et chaque facteur est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car ses racines sont non réels.

$$\boxed{X^{2n}+1=\prod_{k=1}^{n}\left(X^2-2\cos(x_k)X+1\right)}$$

iv. $S_n(f)=\dfrac{\pi}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(a^2-2a\cos(x_k)+1)=\dfrac{\pi}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}(a^2-2a\cos(x_k)+1)=\dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)$

$$\boxed{S_n(f)=\frac{\pi}{n}\ln(a^{2n}+1)}$$

c)

- Si $a\in]0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}a^{2n}=0$ d'où $I(f)=\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}S_n(f)=0$.
- Si $a>1$, $S_n(f)=\dfrac{\pi}{n}\ln(a^{2n}(1+\dfrac{1}{a^{2n}}))=2\pi\ln a+\dfrac{\pi}{n}\ln(1+\dfrac{1}{a^{2n}})$ d'où $I(f)=\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}S_n(f)=2\pi\ln a$.

d) Si $a\in]0,1[$, $S_n(f)-I(f)=S_n(f)\sim\dfrac{\pi}{n}a^{2n}$ puisque $\ln(1+x)\sim x$ au voisinage de 0.
Si $a>1$, $S_n(f)-I(f)=\dfrac{\pi}{n}\ln(1+\dfrac{1}{a^{2n}})\sim\dfrac{\pi}{na^{2n}}$.