

-----  
**Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées**

**L'usage des calculatrices est interdit**

On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ , et  $B = (1, X, X^2, \dots, X^n)$  sa base canonique.

Etant donné une famille de  $(n+1)$  réels distincts  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , on lui associe

les polynômes  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  tels que : 
$$\begin{cases} \forall j \in [[0..n]] - \{i\} & L_i(a_j) = 0 \\ L_i(a_i) = 1 \end{cases}$$

On note enfin  $A$  la matrice carrée dont les vecteurs colonnes sont les composantes dans la base  $B$  des vecteurs  $L_0, L_1, L_2, \dots, L_n$ .

**I) On prend**  $n = 2$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ .

1. Donner  $L_0, L_1, L_2$

Montrer que  $(L_0, L_1, L_2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Quelles sont les composantes d'un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  dans cette base  $(L_0, L_1, L_2)$  ?

2. Former la matrice de changement de base de  $B = (1, X, X^2)$  à  $B' = (L_0, L_1, L_2)$

3. Déterminer les polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  tels que :  $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$

**II) Retour au cas général**

1. Montrer que  $B' = (L_0, L_1, L_2, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Indiquer les composantes sur la base  $B'$  d'un polynôme  $P$  quelconque de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Montrer que  $A$  est inversible, calculer son inverse

3. Montrer que 
$$\sum_{i=0}^n L_i = 1.$$

En déduire que la somme des éléments de la première ligne de  $A$  est égale à 1, et que la somme des éléments de toute autre ligne de  $A$  est nulle.

**III) Etude du cas**  $a_0 = 0$

1. Déterminer les coefficients de la première ligne de  $A$

2. Montrer qu'il existe des polynômes  $P$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ , différents du polynôme nul tels que :

$$P(X) = \sum_{i=0}^n P(a_i)X^i$$

**IV) Etude du cas**  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2, \dots$ ,  $a_n = n$  On note dorénavant :

$L_{i,p}$  le polynôme de  $\mathbb{R}_p[X]$  tel que

$$\forall j \in [[0..p]] - \{i\} \quad L_{i,p}(j) = 0 \text{ et } L_{i,p}(i) = 1$$

Et on convient que  $L_{0,0} = 1$

1. Montrer que  $B'' = (L_{0,0}, L_{1,1}, L_{2,2}, \dots, L_{n,n})$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

2. Soit le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n (-1)^k L_{k,k}$ ,

1. Pour tout  $j \in [[0..n]]$  calculer  $L_{k,k}(j)$ .

2. Pour tout  $j \in [[0..n]]$  simplifier  $\sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{j}{i}$

3. Déterminer les racines de  $P$ , puis calculer explicitement le polynôme  $P$ .

3.

1. Ecrire la matrice de changement de base de  $B' = (L_{0,n}, L_{1,n}, L_{2,n}, \dots, L_{n,n})$  à  $B''$

2. Montrer que l'on peut écrire la matrice  $A$  comme le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure.

3. Effectuer tous les calculs du IV.3.2 pour  $n = 2$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$