ECOLE DE L'AIR
MP 2003
Epreuve 2 , Première partie

1. **a)** En élevant au carré les quantités positives on obtient :

$$\begin{aligned} M &\in L \Leftrightarrow \left((x-c)^2+y^2\right).\left((x+c)^2+y^2\right)=c^4 \\ &\Leftrightarrow x^4+y^4+2x^2y^2-2c^2x^2+2c^2y^2=0 \end{aligned}$$

b) On a donc :

$$\begin{aligned} M &\in L \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2=2c^2\left(x^2-y^2\right) \Leftrightarrow r^4=2c^2r^2\left(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\right) \\ &\Leftrightarrow (r=0) \text{ ou } \left(r^2=2c^2\cos(2\theta)\right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que si $\theta=\pi/4$ $\cos(2\theta)=0$ donc

$$M\in L\Leftrightarrow r^2=2c^2\cos(2\theta)$$

Donc $\boxed{\theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \text{ modulo } \pi \text{ et } r=c\sqrt{2}\sqrt{\cos(2\theta)}}$

2.

a) On a pour $\theta\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ modulo π une fonction C^∞ .On peut donc dériver:

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{dM}}{d\theta} &= -a\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\overrightarrow{u}(\theta)+a\sqrt{\cos(2\theta)}\overrightarrow{v}(\theta) \\ &= \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\left(-\sin(2\theta)\overrightarrow{u}(\theta)+\cos(2\theta)\overrightarrow{v}(\theta)\right) \end{aligned}$$

ce qui exprime le vecteur comme produit d'un réel positif par un vecteur de norme 1

$$\boxed{\overrightarrow{T}(\theta)=-\sin(2\theta)\overrightarrow{u}(\theta)+\cos(2\theta)\overrightarrow{v}(\theta)\ ,\ \overrightarrow{N}(\theta)=-\cos(2\theta)\overrightarrow{u}(\theta)-\sin(2\theta)\overrightarrow{v}(\theta)}$$

On a donc $V=\pi/2+2\theta$ et $\alpha=\theta+V=\pi/2+3\theta$ et donc :

$$\boxed{\overrightarrow{T}(\theta)=-\sin(3\theta)\overrightarrow{i}+\cos(3\theta)\overrightarrow{j}\ ,\ \overrightarrow{N}(\theta)=-\cos(3\theta)\overrightarrow{i}-\sin(3\theta)\overrightarrow{j}}$$

Si $\theta=\pi/4[\pi]$ la fonction n'est pas dérivable , les vecteurs T et N ne sont pas définis.

b) La fonction est périodique de période π on peut donc faire l'étude sur $[-\pi/4,\pi/4]$ et compléter par symétrie par rapport à 0 La fonction est paire donc on peut faire l'étude sur $[0,\pi/4]$ et compléter par symétrie par rapport à $x'Ox$.

- en $\theta=0$ on a $\overrightarrow{OM}(0)=a\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{T}(0)=\overrightarrow{j}$: tangente verticale d'équation $x=a$
- en $\theta=\pi/6$ on a $\overrightarrow{OM}(0)=\frac{a}{\sqrt{2}}u(\pi/6)=a\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{i}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{T}(0)=\overrightarrow{i}$ tangente horizontale d'équation $y=\frac{a}{2\sqrt{2}}$
- en $\theta=\pi/4$ la courbe passe par le pôle .Il y a une tangente d'angle polaire $\pi/4$ donc d'équation $y=x$

c) On a déjà calculé l'angle au **a)** $\phi(\theta)=\pi/2+3\theta$ (le sujet attend donc peut-être au **a)** le calcul explicite du changement de repère)..On a

$$\gamma=\frac{d\phi}{ds}=\frac{d\phi}{d\theta}.\frac{d\theta}{ds}=\frac{d\phi}{d\theta}.\frac{1}{\left\|\frac{dM}{d\theta}\right\|}$$

donc :

$$\forall\theta\in[0,\frac{\pi}{4}[\ :\ \gamma(\theta)=\frac{3\sqrt{\cos(2\theta)}}{a}$$

La courbure est donc maximale en $\theta=0$ où elle vaut $\frac{3}{a}$ et n'admet pas de minimum car elle n'est pas définie en $\frac{\pi}{4}$.

3. **a)** En polaire on a pour le domaine entouré par une courbe $\mathcal{A} = \int \frac{r^2}{2} d\theta$. Ou encore pour retrouver cette expression $\mathcal{A} = \int\int r dr d\theta$ On a donc pour l'une des boucles de la courbe :

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a^2 \cos(2\theta)}{2} d\theta = \left[\frac{a^2 \sin(2\theta)}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}$$

$\boxed{\text{l'aire totale du domaine intérieure est } a^2}$

b) Pour une boucle

$$l_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left\| \frac{dM}{d\theta} \right\| d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta$$

L'intégrale impropre étant bien convergene car si on pose $\theta = \pi/4 + u$ on a $\frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = \frac{a}{\sqrt{\sin(2u)}} \sim \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{\&}{\sqrt{u}}$. intégrale impropre convergente sur $[0, \pi/4[$ car la fonction est positive, équivalente en $\pi/4$ à une fonction intégrable sur cet intervalle. (et idem sur $]-\pi/4, 0]$)

par parité de la fonction à intégrer puis par changement de variable $t = 2\theta$

$$l_1 = 2a \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = a \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{\cos(t)}}$$

Comme on deux boucles symétriques

$$\boxed{l = 2a \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta)}}}$$

4.

a) pour F_1 on $\theta = 0, r = c$ d'où pour F_1' $\theta = 0, r = \frac{a^2}{c} = 2c$ (car $a = c\sqrt{2}$) Si on préfère en cartésienne $F_1' = (2c, 0)$. de même $F_2' = (-2c, 0)$

On demande l'équation de l'hyperbole de foyer F_1' et F_2' et d'axe de longueur $2a$.Le centre de l'hyperbole est le centre du repère et l'axe focale est $x'Ox$. l'équation est donc du type

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1$$

D'après la longueur de l'axe focale $\alpha = a$ (peut se retrouver en disant que le point $(\alpha, 0)$ est sur l'hyperbole et écrire $|MF_1' - MF_2'| = 2a$)

la distance focale est $C = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ donc $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + \beta^2}$ donc $\beta = a$

$\boxed{\text{l'hyperbole a l'équation } x^2 - y^2 = a^2}$

b) Pour $\theta \in]-\pi/4, \pi/4[$ modulo 2π on a pour M $r = a\sqrt{\cos(2\theta)}$ donc pour M' $\boxed{r = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}}}$

On a comme tout est positif :

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \Leftrightarrow r^2 \cos(2\theta) = a^2 \Leftrightarrow r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = a^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

quelle surprise l'ensemble L' est l'hyperbole de foyer F_1' et F_2' de la question précédente.