CCP 2001. Filière MP. MATHÉMATIQUES 1.

I.Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.

En se plaçant dans le plan on peut faire des figures pour voir ce qui se passe.

1.Inégalité de Schwarz et cas d'égalité : question de cours classique.
Soit (a,b,c) vérifiant les conditions de l'énoncé.(figure 1 dans le plan).On note $i = \frac{a+b}{2}$: la médiane du triangle est aussi hauteur :

$$\langle b-c, a-i\rangle = \left\langle b-c, \frac{2a-b-c}{2}\right\rangle = \left\langle (b-a)+(a-c), \frac{(a-b)+(a-c)}{2}\right\rangle = \frac{\|a-c\|^2 - \|a-b\|^2}{2}$$

On peut alors appliquer Pythagore :

$$\|a-b\|^2 = \|(a-i)+(i-b)\|^2 = \left\|(a-i)+(\frac{c-b}{2})\right\|^2 = \|a-i\|^2 + \frac{\|c-b\|^2}{4}$$

$$\boxed{\|a-b\|^2 > \|a-i\|^2}$$

On peut aussi utiliser la formule générale qui donne la longueur de la médiane en fonction des côtés (TD 21 exo 9)

2.Dans le cas où F est borné , F est un compact non vide . Or la fonction $k -> \|x-k\|$ est continue sur le compact F à valeur dans $\mathbb{R}$. L'image est donc un compact de $\mathbb{R}$ qui contient son plus petit élément :

$$\exists u \in F, \forall k \in F, \|x-u\| \leq \|x-k\|$$

Dans le cas général ,(figure 2) l'ensemble des distance $\{\|x-y\|, y \in F\}$ est un sous ensemble non vide minoré par 0 de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne inférieure d . On applique l'étude précédente au compact : $F \cap B'(x, d+1)$ qui est non vide car par définition de la borne inférieure $\exists y \in F, d \leq \|x-y\| < d+1$.

$$\exists u \in F \cap B'(x, d+1), \forall k \in F \cap B'(x, d+1), \|x-u\| \leq \|x-k\|$$

Si $\|x-u\| > d$, $\forall y \in F$ $\|x-y\| \geq \|x-u\|$ donc $\inf\{\|x-y\|, y \in F\} \geq \|x-u\|$ absurde car c'est d .

$$\boxed{\exists u \in F, \forall k \in F, \|x-u\| \leq \|x-k\|}$$

$$\boxed{\text{La distance d'un point à un fermé est atteinte.}}$$

3.Soit désormais A un convexe fermé et deux points u_1 et u_2 de A en lesquels la distance de x à A est atteinte. Si $u_1 \neq u_2$, on a d'après **1.**, $\|x-m\| < \|x-u_1\| = (x,A)$ avec $m = \frac{u_1+u_2}{2}$ le milieu . Or si A et convexe le milieu de $[u_1, u_2]$ est dans A .Il existe un point m de A strictement plus près de x que le point rendant la distance minimum ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{La distance à un convexe fermé est atteinte en un unique point.}}$$

4.Soit α vérifiant les conditions de l'énoncé et soit y quelconque de A. Le sujet veut dire que l'angle $\widehat{x\alpha y}$ est toujours droit ou obtus.(figure 3)
$\|x-y\|^2 = \|x-\alpha\|^2 + \|y-\alpha\|^2 - 2\langle x-\alpha, y-\alpha\rangle \geq \|x-\alpha\|^2$ donc α réalise le minimum et $\alpha = P(x)$.
5.Supposons qu'il existe $y \in A$ vérifiant les conditions de l'énoncé (ce qui assure $y \neq P(x)$) et soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = P(x) + t(y - P(x))$. On remarque que $y(t)$ décrit la droite passant par $P(x)$ et de vecteur directeur $(y - P(x))$.$(figure4)$
On a $S(t) = \|x - y(t)\|^2$.
Par ailleurs $S(t) = \|x-P(x)\|^2 - 2\langle x-P(x), y-P(x)\rangle t + \|y-P(x)\|^2 t^2$ est un trinôme du second degré en t . donc atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en $t_0 = \frac{\langle x-P(x), y-P(x)\rangle}{\|y-P(x)\|^2}$strictement positif .
Donc $S(t_0) < S(0) = \|x-P(x)\|^2$.
Or $S(1) = \|x-y\|^2 > \|x-P(x)\|^2$ puisque $y \neq P(x)$ i.e. $S(1) > S(0)$.
Ainsi $t_0 \in]0,1[$ donc $y(t_0) \in A$ (car A est convexe) et $\|x-y(t_0)\|^2 = S(t_0) < S(0) = \|x-P(x)\|^2$ ce qui est contradictoire avec la définition de $P(x)$ qui rend minimum la distance.
En conclusion il n'existe aucun élément y de A tel que $\langle x-P(x), y-P(x)\rangle > 0$.
6.Simple résumé des deux questions précédente :(figure 3 de nouveau)

$$\boxed{\text{La projection } P(x) \text{ de } x \text{ sur un convexe fermé de } \mathbb{R}^n \text{ est caractérisée par } \langle x-P(x), y-P(x)\rangle \leq 0 \text{ pour tout } y \in A.}$$

7Puisque $P(y) \in A$, on a $\langle x-P(x), P(y)-P(x)\rangle \leq 0$ et de même comme $P(x) \in A$ $\langle y-P(y), P(x)-P(y)\rangle \leq 0$.
En ajoutant les inégalités :$\langle (x-P(x)) - (y-P(y)), P(y)-P(x)\rangle \leq 0$.
Soit $\langle x-y, P(x)-P(y)\rangle - \langle P(x)-P(y), P(y)-P(x)\rangle \leq 0$

$$\boxed{\langle x-y, P(x)-P(y)\rangle \geq \langle P(x)-P(y), P(x)-P(y)\rangle}$$

.
Si $P(x) \neq P(y)$ il en découle par l'inégalité de Schwarz que $\|P(x)-P(y)\| \leq \|x-y\|$. Ce qui est encore vrai si $P(x) = P(y)$. Ainsi

$$\boxed{P \text{ est lipschitzienne de rapport 1 donc continue}}$$

Naturellement $P(x) = x$ si $x \in A$ donc $P(A) = A$ et a fortiori $\boxed{P(\mathbb{R}^n) = A}$.

II.Théorème de Brouwer dans $\mathbb{R}^2$.

9.Avec le sujet on suppose que x et $f(x)$ ont deux points distincts du disque B . Les vecteurs du type $x+t(x-f(x))$ sont ceux de la droite affine passant par x et de vecteur directeur $x-f(x)$. Ce ont donc ceux de la droite passant par x et $f(x)$. On doit donc prouver qu'une droite passant par deux points d'un disque coupe le cercle qui en est le bord. L'existence et géométriquement évidente . Reste à aire le calcul de ρ .

F_x définie sur $\mathbb{R}$ par $F_x(t)=\|x+t(x-f(x))\|^2-1$. On cherche donc t pour rendre nulle cette quantité.

$F_x(t)=\|x-f(x)\|^2 t^2+2\langle x,x-f(x)\rangle t-(1-\|x\|^2)$. $F_x(t)$ est un trinôme du second degré ($f(x)\neq x$). Si on cherche les racines on trouve

$$\Delta(x)=\langle x,x-f(x)\rangle^2+\|x-f(x)\|^2(1-\|x\|^2)$$

:Il existe au moins une racine réelle.

- si $\|x\|=1$ l'une des racines et nulle et l'autre négative car $\langle x,x-f(x)\rangle=1-\langle x,f(x)\rangle\geq 1$ par Cauchy Schwarz
- si $\|x\|<1$ le produit des racines est strictement négatif donc il existe une et une seule racine positive.
- Dans les deux cas ρ est la plus grande racine du trinôme :

  $$\boxed{\rho(x)=\frac{-\langle x,x-f(x)\rangle+\sqrt{\Delta}(x)}{\|x-f(x)\|^2}\text{ avec }\Delta(x)=\langle x,x-f(x)\rangle^2+\|x-f(x)\|^2(1-\|x\|^2)}$$

  ce qui prouve que ρ est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition d'applications classiquement $\mathcal{C}^2$ si Δ et non nul .Or si $\Delta=0$ la droite coupe le cercle en un seul point. Elle est donc tangente au cercle . Ce qui est absurde car la droite contient deux points distincts du disque.

10.$\varphi(x)$ est l'élément construit à la question précédente . Il est donc de norme 1 . On a $\varphi_1^2+\varphi_2^2=1$ donc par dérivation (licite puisque φ est $\mathcal{C}^2$) $\begin{cases}\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\varphi_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=0\\ \varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=0\end{cases}$ c'est à dire

${}^tM(x)\cdot\varphi(x)=0$ pour tout $x\in B$ en notant $M(x)$ la matrice proposée.

Donc $\varphi(x)\in Ker\,(M(x))$. Or $\varphi(x)\neq 0$ puisque $\|\varphi(x)\|=1$. Donc $M(x)$ n'est pas inversible.

11.

11a) $A(x)$ est la matrice jacobienne de α. Il vient $\psi(x,t)=1+t.tr(A(x))+t^2\det(A(x))$ donc $\beta(x)=tr(A(x))$ et $\gamma(x)=\det(A(x))$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ puisque α est de classe $\mathcal{C}^2$.

En outre $\varphi(x)=x+\alpha(x)$ donc $M(x)=\begin{pmatrix}1+\alpha_{1,1}(x) & \alpha_{2,1}(x)\\ \alpha_{1,2}(x) & 1+\alpha_{2,2}(x)\end{pmatrix}=\psi(x,1)$ et, d'après **10.**, $\boxed{\psi(x,1)=0.}$

11b) Pour t fixé, $x->\psi(x,t)$ est continue sur B d'après **a.** donc J est bien définie.

$J(0)=\iint_B dx_1dx_2=\pi$ (aire d'un disque)

$J(1)=0$ d'après **a.**

11c. $\iint_B\beta(x)dx_1dx_2=\iint_b(\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2})dx_1dx_2$. Par Fubini (licite car les fonctions sont continue sur B) :

$$\begin{aligned}\iint_B\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}dx_1dx_2 &= \int_{x_2=-1}^{x_2=1}\left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1+x_2^2}}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2\\ &= \int_{x_2=-1}^{x_2=1}\left(\alpha_1(\sqrt{1-x_2^2},x_2)-\alpha_1(-\sqrt{1-x_2^2},x_2)\right)dx_2.\end{aligned}$$

Or, pour tout $x_2\in[-1,1]$, $y=(-\sqrt{1-x_2^2},x_2)$ et $z=(\sqrt{1-x_2^2},x_2)$ appartiennent à S donc $\rho(y)=\rho(z)=0$ donc $\alpha(y)=\alpha(z)=0$ donc a fortiori $\alpha_1(y)=\alpha_1(z)=0$.

Ainsi $\iint_B\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1}dx_1dx_2=0$ et de même $\iint_B\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_2}dx_1dx_2=0$. Donc finalement $\boxed{\iint_B\beta(x)dx_1dx_2=0.}$

11d. Par Fubini comme ci-dessus, $I_1(g)=\int_{x_2=-1}^{x_2=1}\left(\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}}\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2}dx_1\right)dx_2$.

L'intégrale interne se calcule par parties (licite car g est de classe $\mathcal{C}^2$) et vaut ainsi :

$g_1(\sqrt{1-x_2^2},x_2)\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\sqrt{1-x_2^2},x_2)-g_1(-\sqrt{1-x_2^2},x_2)\frac{\partial g_2}{\partial x_2}(-\sqrt{1-x_2^2},x_2)-\int_{x_1=-\sqrt{1-x_2^2}}^{x_1=\sqrt{1-x_2^2}}g_1(x)\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1\partial x_2}(x)dx_1$.

En réutilisant Fubini en sens inverse pour la fonction $x->g_1(x)\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1\partial x_2}(x)$ (qui est bien continue sur B puisque g est $\mathcal{C}^2$), on obtient la valeur cherchée pour $I_1(g)$.

D'après la calcul de γ : $\iint_B\gamma(x)dx_1dx_2=I_1(\alpha)-I_2(\alpha)$ et la transformation précédente s'applique car α est bien de classe $\mathcal{C}^2$ (Cf **9.**),.

- Les intégrales doubles se simplifient $\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_2 \partial x_1}$ d'après le théorème de Schwarz car α est $\mathcal{C}^2$
- Tous les points du type $\left(\sqrt{1-s^2}, s\right)$ sont sur le cercle S . En un tel point ρ et nul donc aussi α . Les deux intégrales simples sont nulles.
- $\boxed{\iint_B \gamma(x) dx_1 dx_2 = 0.}$

Il découle immédiatement de ce qui précède

$$J(t) = \int\int_B 1 + t \int\int_B \beta + t^2 \int\int_B \gamma = \int\int_B = 1 = \pi$$

ce qui est contradictoire avec $J(1) = 0$.
La contradiction porte sur la seule hypothèse faite à savoir f n'admet pas de point fixe, hypothèse qui nous a permis de définir la fonction ρ.

$\boxed{\text{Le théorème de Brouwer pour une application } C^2 \text{ de } B \text{ dans } B \text{ est établi.}}$

12,13,14:admis

$\boxed{\text{Toute application continue de } B \text{ dans } B \text{ admet un point fixe.}}$

15. Il suffit de remarquer que g est une application continue de B dans B.
16.
a)A étant compact et f continue, $f(A)$ est compact ainsi que $A \cup f(A)$ en tant qu'union de deux compacts. Donc $A \cup f(A)$ est borné et r existe.
b) h est une application de $\overline{B}(O, r)$ dans A donc a fortiori dans $\overline{B}(O, r)$. En outre elle est continue puisque f et P le sont (Cf **7.**). D'après la question précédente, h admet un point fixe $\omega \in \overline{B}(O, r)$: $f(P(\omega)) = \omega$.
Comme ω est dans l'image de f ω est dans A .

$\boxed{\text{Le théorème de Brouwer dans } \mathbb{R}^2 \text{ est ainsi établi.}}$

remarque : En utilisant la question 8 le sujet initiale montre un résultat un peu plus général.

III. **Quelques conséquence du théorème de Brouwer.**

17. Supposons $g = -f$ continue. Alors g est une application continue de B dans S donc dans B et admet, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe ω qui appartient à S puisque g est à valeurs dans S. Ainsi $f(\omega) = -\omega$. Mais comme $f(x) = x$ sur S, $f(\omega) = \omega$. Donc $\omega = 0$ ce qui est impossible puisque $\omega \in S$.

$\boxed{\text{Le théorème de non rétraction continue est établi :}}$

$\boxed{\text{Il n'existe aucune application continue de } B \text{ dans } S \text{ qui fixe les points de } S.}$

18. Comme $y \notin f(B)$, g est bien définie et est une application continue de B dans S (donc aussi dans B) et admet donc, d'après le théorème de Brouwer, un point fixe $\omega = g(\omega)$ qui appartient à S
Donc $g(\omega) = \frac{y-\omega}{\|y-\omega\|}$ car $f(\omega) = \omega$ puisque $\omega \in S$. Ainsi $\frac{y-\omega}{\|y-\omega\|} = \omega$ avec $\omega \in S$.
Donc $y = \omega\left(1 + \|y - \omega\|\right)$ donc $\|y\| > 1$ car $y \neq w$ (y n'est pas dans l'image et ω l'est)

$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } B \text{ et fixe les points de } S \text{ alors } B \subset f(B).}$

Suivent deux dernières questions non adaptées au programme de PC.