Concours national marocain
PSI 2004 math 2

notation : pour ne pas surcharger si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je note $\exp(A) = \exp \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, en "oubliant" une paire de parenthèses.
Dans vos copies certaines des récurrences doivent être rédigées même si dans ce devoir elles sont toutes "évidentes"

I Résultats généraux

Tous les résultats de cette partie se généralisent à une matrice $n \times n$ en prenant une norme d'algèbre.
1a) On sait que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est une série entière de rayon de convergence $+\infty$ et telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \|A\|^n = e^{\|A\|}}$$

1b) On a $\left|x_{i,j}^{(k)}\right| \leq \sum_{p=1}^{2} \left|x_{i,p}^{(k)}\right| \leq \|X_k\| = \left\|\frac{1}{k!}A^k\right\| = \frac{1}{k!}\left\|A^k\right\|$
Le sujet nous dit d'admettre que l'on a une norme vérifiant $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$. On a donc $\left\|A^2\right\| \leq \|A\|^2$ et par récurrence $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$
Donc

$$\left|x_{i,j}^{(k)}\right| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

On a le terme général d'une série à termes positifs, majoré par le terme général d'une série convergente donc la série $\sum x_{i,j}^{(k)}$ converge absolument.
donc pour tout i et j la suite$\left(\sum_{k=0}^{n} x_{i,j}^{(k)}\right)$ converge . Une suite de matrices converge si et seulement si la suite de chacune de ses coordonnées converge et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (E_n(A)) \text{ converge}}$$

2) On a $0 \leq \|B(A_n - A)C\| \leq \|B\| \|A_n - A\| \|C\|$. Donc par encadrement si (A_n) tend vers A alors (BA_nC) tend vers BAC
3a) On a classiquement $\left(PAP^{-1}\right)^k = PA^kP^{-1}$. Donc $E_n(PAP^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} PA^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k\right)P^{-1} = PE_n(A)P^{-1}$
3b) En passant à la limite (qui existe d'après la q1) et en utilisant q2

$$\boxed{\exp(PAP^{-1}) = P\exp(A)P^{-1}}$$

Si deux matrices sont semblables leurs exponentielles sont semblables.
4a) En dimension finie toute application linéaire est continue. Or la transposition est linéaire et $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est de dimension finie.
4b) Sachant ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$ on a ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ et donc par linéarité ${}^t(E_n(A)) = E_n({}^tA)$.
Par définition $\lim (E_n({}^tA)) = \exp({}^tA)$ et par critère séquentiel de la continuité :

$$\lim (E_n(A)) = \exp(A) \Rightarrow \lim \left({}^t(E_n(A))\right) = {}^t \lim (E_n(A)) = {}^t\exp(A)$$

et donc

$$\boxed{\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)}$$

II exemples de calculs

1) Par récurrence $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$ et donc $E_n(D) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\alpha^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\beta^k \end{pmatrix}$ et par limite des coordonnées $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}$

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\beta \end{pmatrix}}$$

remarque on peut généraliser à une matrice diagonale $n \times n$
2) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2\mu a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ et par récurrence $A^k = \begin{pmatrix} a^k & k\mu a^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$. et donc $E_n(A) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k & \mu\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}a^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k \end{pmatrix}$
pour avoir la limite il suffit de calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!}a^{k-1}$. Si on pose $q = k - 1$ on a $\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!}a^q = e^a$

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & \mu e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}}$$

3) En posant $a = b$ on obtient ${}^tB = A$ et donc d'après $I4$: $\exp(B) = {}^t\exp(A)$

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} b & 0 \\ \mu & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^b & 0 \\ \mu e^b & e^b \end{pmatrix}}$$

4)

- Si $\mu = 0$ C est diagonale et la question II.1 donne $\exp(C) = \begin{pmatrix} e^c & 0 \\ 0 & e^c \end{pmatrix}$

- Si $\mu \neq 0$ on a un calcul sans gros problèmes : $P_C(\lambda) = \lambda^2 - 2c\lambda + c^2 - \mu^2$. On a deux valeurs propres distincte $c \pm \mu$ et les sous espaces propres $E_{c+\mu} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_{c-\mu} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'où une solution au problèm

  $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} c+\mu & 0 \\ 0 & c-\mu \end{pmatrix}}$

  On en déduit $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ puis $\exp(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{c+\mu} & 0 \\ 0 & e^{c-\mu} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} c & \mu \\ \mu & c \end{pmatrix} = e^c \begin{pmatrix} ch(\mu) & sh(\mu) \\ sh(\mu) & ch(\mu) \end{pmatrix}}$$

- On constate que la formule reste valable si $\mu = 0$

On a

$$\exp(A+B) = \exp \begin{pmatrix} a+b & \mu \\ \mu & a+b \end{pmatrix} = e^{a+b} \begin{pmatrix} ch(\mu) & sh(\mu) \\ sh(\mu) & ch(\mu) \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(A)\exp(B) = e^a e^b \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix} = e^{a+b} \begin{pmatrix} 1+\mu^2 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix}$$

Pour avoir égalité on doit avoir $ch(\mu) = 1 + \mu^2 = 1$ donc $\mu = 0$.
Réciproquement si $\mu = 0$ alors l'égalité est vrai

$$\exp(A+B) = \exp(A).\exp(B) \iff \mu = 0$$

remarque on peut montrer $AB = BA \Longrightarrow \exp(A+B) = \exp(A).\exp(B)$
5) mêmes calculs qu'au début de la question 4 .

- Si $b = 0$ le résultat est évident et donne bien le résultat voulu

- Si $b \neq 0$, $P_R(\lambda) = \lambda^2 - a\lambda + a^2 + b^2$, les valeurs propres sont $a \pm ib$, les sous espaces propres $E_{a+ib} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ $E_{a-ib} = Vect \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

  Une solution est donc

$$\boxed{Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} , D = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}}$$

  d'où $Q^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$ puis $\exp(R) = Q \begin{pmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{a+ib} \end{pmatrix} Q^{-1}$

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}}$$

- Pour trouver **<u>une</u>** solution de $\exp(J) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ il suffit de prendre $a = 0$ et $b = \pi$

$$\boxed{\exp \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

III.A image de l'exponentielle si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1a) D'après $II.1$ si $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ est diagonale $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ est diagonale . Mais d'après I.3 si A et D sont semblables $\exp(A)$ et $\exp(D)$ le sont aussi . Donc $\exp(A)$ est semblable à la matrice diagonale $\exp(D)$.
De plus le calcul de $I.3$ montre que les matrices de passage sont les mêmes.

$$\boxed{\text{si } A \text{ et } D \text{ sont semblables } \exp(A) \text{ et } \exp(D) \text{ le sont aussi}}$$

1b) Comme on est dans les complexes toute matrice carrée est trigonalisable, donc A est semblable à $T = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Mais si $b \neq a$ T (donc A) admet deux valeurs propres distinctes et est donc diagonalisable (exclu ici) . Donc $a = b$ et A est semblable à $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On a donc $\exp(A)$ semblable à $\exp(T) = \begin{pmatrix} e^a & \mu e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ et les matrices de passages sont les mêmes.

$\exp(A)$ est diagonalisable si et seulement si $\exp(T)$ l'est . Or $\exp(T)$ admet une unique valeur propre e^a et comme $\mu e^a \neq 0$ le calcul donne un sous espace propre qui est une droite. Si A n'est pas diagonalisable $\exp(A)$ ne l'est pas.
2) Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant donc :

- Si A est diagonalisable : $\det(\exp(A)) = \det(\exp(D)) = e^a e^b = e^{a+b} = e^{Tr(D)} = e^{Tr(A)}$
- Sinon : $\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = e^a e^a = e^{2a} = e^{Tr(T)} = e^{Tr(A)}$

$$\boxed{\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}}$$

3) Pour tout complexe z e^z est un complexe non nul (son module est $e^{\mathrm{Re}(z)}$) . Donc pour toute matrice A $\det\left(e^A\right) \neq 0$ donc $e^A \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$
4) Soit Y une matrice inversible 2×2. Pour utiliser les questions précédentes et chercher un antécédent de Y on va distinguer deux cas :

- Si Y est diagonalisable il existe $D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ diagonale et P inversible tels que $X = PDP^{-1}$. Si on trouve un matrice Δ telle que $\exp(\Delta) = D$ alors $X = P\Delta P^{-1}$ vérifie (d'après I.3)

  $$\exp(X) = P\exp(\Delta)P^{-1} = PDP^{-1} = Y$$

  Y étant inversible D est inversible donc u et v sont non nuls. il existe a tel que $e^a = u$ (il suffit de prendre $\mathrm{Re}(a) = \ln(|u$ et $\mathrm{Im}(a)$ un argument de u) et b tel que $e^b = v$
  On a alors d'après II.1 $\exp\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. $X = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}P^{-1}$ est une solution du problèm
- Si Y n'est pas diagonalisable on trigonalise $Y = PTP^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} u & \nu \\ 0 & u \end{pmatrix}$ et on cherche $\tau = \begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ telle qu $\exp(\tau) = T$ soit d'après II.2 $e^a = u$ et $\mu e^a = \nu$.
  Y étant inversible u est non nul donc a existe et donc aussi $\mu = \nu e^{-a}$ et $X = P\tau P^{-1}$ est solution du problème.

$$\boxed{M -> \exp(M) \text{ est surjective (mais pas injective) de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ sur } \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})}$$

III.B image de l'exponentielle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1) Soit a un endomorphisme de matrice A

- Si A admet deux valeurs propres réelles distinctes A est diagonalisable
- Si A admet une valeur propre réelle double et un sous espace propre de dimension 2 A est diagonalisable
- Si A admet une valeur propre réelle et un sous espace propre de dimension 1 $Vect(v)$ alors dans une base de premie vecteur v la matrice de a est du type $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Et comme il existe une valeur propre double $b = a$
- Si A n'admet pas de valeur propre réelle alors A admet deux valeurs propres complexes distinctes et conjuguées . dor A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et A est semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$

  remarque : si on admet déjà que deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut diagonaliser o trigonaliser dans les complexes puis revenir dans les réels.

La formule $\det(\exp(A)) = e^{Tr(A)}$ étant vraie pour toute matrice complexe elle est vraie pour toute matrice réelle . Et comme maintenant la trace est réelle son exponentielle est un réel positif.
De plus si A est à coefficients réelles les puissance A^k le sont aussi donc aussi $E_n(A)$ et donc aussi $\exp(A)$

$$\boxed{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \Longrightarrow \exp(A) \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R}) \text{ et } \det(\exp(A)) > 0}$$

2)

- N étant triangulaire de terme diagonal -1 sa seule valeur propre est -1. On vérifie ensuite que $E_{-1}(N) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de dimension 1 ; N n'est pas diagonalisable.

- Si A admet une valeur propre réelle on peut d'après III.B.1 diagonaliser ou trigonaliser A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A est don semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$. On utilise alors $I.3$ et les calculs de $II.1$ ou $II.2$ pour dire que $\exp(A)$ es semblable à $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ ou à $\begin{pmatrix} e^a & \mu e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}$ et admet donc des valeurs propres strictement positives . <u>absurde.</u> Don $Sp(A) = \emptyset$
- On est donc dans le cas III.B.1.c et A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On peut alors utiliser III.A.1.a pour dire que I est aussi diagonalisable . <u>absurde</u>

$$\boxed{\exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ n'a pas de solution dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

et pourtant $\det(N) > 0$

3) on cherche donc à résoudre $\exp(X) = A$.

3a) On cherche à diagonaliser X dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en reprenant les 3 cas du III.B.1 et les calculs du II.1 et II.2

- Si X est diagonalisable X est semblable a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ avec a, b réels . Donc $A = \exp(X)$ est semblable à $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ donc $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{e^a, e^b\} \subset \mathbb{R}^{+*}$

  et réciproquement si $A = P\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $u > 0, v > 0$ alors $X = P\begin{pmatrix} \ln(u) & 0 \\ 0 & \ln(v) \end{pmatrix}P^{-1}$ est solution .
- Si X admet une valeur propre réelle double et n'est pas diagonalisable X est semblable à $\begin{pmatrix} a & \mu \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec a et μ rée ...$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{e^a\} \subset \mathbb{R}^{+*}$

  et réciproquement $A = P\begin{pmatrix} u & \nu \\ 0 & u \end{pmatrix}P^{-1}$ avec $u > 0, \nu \in \mathbb{R}$ alors $X = P\begin{pmatrix} \ln(u) & \nu/u \\ 0 & \ln(u) \end{pmatrix}P^{-1}$ est solution (cf calcul d III.A.4) .
- Si X n'a pas de valeur propre réelle X est semblable a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec a non réel . Donc $A = \exp(X)$ est semblable $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{\overline{a}} \end{pmatrix}$ donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{e^a, e^{\overline{a}}\}$. On veut que l'une des valeurs propres soit réelle , donc le deux sont réels (car l somme est réelle : c'est la trace)

  Or un argument de e^a est $\operatorname{Im}(a)$, on veut donc $\operatorname{Im}(a) = 0[\pi]$
  - Si $\operatorname{Im}(a) = 0$, a est réelle absurde
  - Si $\operatorname{Im}(a) = 0[2\pi]$, $e^a = e^{\operatorname{Re}(a)}$ et on est ramené au cas $\operatorname{Im}(a) = 0$. (ou faire un calcul du type de celui ci dessous)
  - Si $\operatorname{Im}(a) = \pi[2\pi]$ $e^a = -e^{|a|}$ et $e^{\overline{a}} = -e^{|a|}$. Donc A est semblable à $-e^{|a|}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme $PI_2P^{-1} = I_2$ il rest $A = -e^{-|a|}I_2$.

    réciproquement si $A = \lambda I_2$ avec $\lambda < 0$ (le cas $\lambda > 0$ donne diagonalisable à valeur propres positives strictement $X = \begin{pmatrix} \ln(|\lambda|) & -\pi \\ \pi & \ln(|\lambda|) \end{pmatrix}$ convient d'après le calcul du II.5

$$\boxed{\text{Si } Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset \ \ , A \in \operatorname{Im}(\exp) \iff Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}^{+*} \text{ ou } \exists\lambda < 0 \ , A = \lambda I_2}$$

3b) C'est la question II.5.a à l'envers : Si A est semblable à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \overline{a} \end{pmatrix}$, on pose $a = \alpha + i\beta$ avec α et β réels . Alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ donc aussi à $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc aussi dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après le résultat admis. On peut décomposer $A = P\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}$

Si on pose $e^{\varepsilon} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ on a $(\alpha e^{-\varepsilon})^2 + (\beta e^{-\varepsilon})^2 = 1$ et donc il existe un réel θ tel que $\alpha e^{-\varepsilon} = \cos(\theta)$ et $\beta e^{-\varepsilon} = \sin(\theta)$ et donc $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = e^{-\varepsilon}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

D'après II.5 $\exp\begin{pmatrix} \varepsilon & -\theta \\ \theta & \varepsilon \end{pmatrix} = e^{-\varepsilon}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et donc d'après I.3 si $X = P\begin{pmatrix} \varepsilon & -\theta \\ \theta & \varepsilon \end{pmatrix}P^{-1}$ alors $\exp(X) = A$.

On remarque que dans ce cas $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset \subset \mathbb{R}^{+*}$

$$\boxed{\text{l'image par exp de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est } \{\lambda I_2, \lambda < 0\} \cup \{A, Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}\}}$$

complément

démonstration de : si A et B deux matrices à coefficients réels sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est à dire :

$$\left(\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}) \ , B = PAP^{-1}\right) \Longrightarrow \left(\exists Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \ , B = QAQ^{-1}\right)$$

En prenant les parties réelles et imaginaires de chaque coefficient de P on peut écrire $P = Q_1 + iQ_2$, Q_1 et Q_2 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On a alors $BP - PA = 0 \Rightarrow (BQ_1 - Q_1A) + i(BQ_2 - Q_2B) = 0$. Chaque coefficient de $(BQ_1 - Q_1A) + i(BQ_2 - Q_2B)$ est nul donc aussi sa partie réelle et sa partie imaginaire donc $BQ_1 - Q_1A = 0$ et $BQ_2 - Q_2B = 0$. Si Q_1 ou Q_2 est inversible on a fini . Sinon pour tout x soit $M_x = Q_1 + xQ_2$ on a $BM_x - M_xA = 0$ par combinaison linéaire . mais $\phi(x) = \det(M_x)$ est un polynôme en x de degré au plus n (car chaque coefficient est de degré au plus 1 et on refait le début de la démonstration du polynôme caractéristique) , ce polynôme étant non nul car $\phi(i) \neq 0$. ϕ admet dons au plus n racines et il existe des réels tels que $\phi(x) \neq 0$. On peut alors choisir un tel x et poser $Q = M_x$ qui est inversible et à coefficients réels telle que $BQ - QA = 0$ et donc $B = QAQ^{-1}$.