PARTIE I

1. On constate que $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_{-1-\lambda}$. Ce qui justifie la restriction à $\lambda \geq -1/2$ par symétrie

2. Soit $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de $\mathcal{E}_\lambda$ avec un rayon de convergence $R > 0$. La série est alors C^∞ sur $]-R, R[$ e dérivable termes à termes.

   On a alors :$y\prime(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n$ et $y"(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, n a_{n+1} x^{n-1}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$

   Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\lambda \quad &\iff \quad x^2 y"(x) + xy"(x) + 2xy'(x) + y(x) - \lambda(\lambda+1)\, y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, n a_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n - \lambda(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
&\iff \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left((n(n-1) + 2n - \lambda(\lambda-1)\right) a_n + \left((n+1)n + (n+1) \right) a_{n+1} \right] x^n = 0 \text{ les termes manquants sont nuls} \\
&\iff \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(n(n+1) - \lambda(\lambda+1) \right) a_n + (n+1)^2 a_{n+1} \right] x^n = 0
\end{aligned}$$

   Par unicité du développement en série entière d'une fonction tous ses coefficients sont nuls :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ a_{n+1} = -\frac{n(n+1) - \lambda(\lambda+1)}{(n+1)^2} a_n}$$

   On peut alors remarquer que $n(n+1) - \lambda(\lambda+1) = n^2 + n - \left(\lambda^2 + \lambda\right)$ est un trinôme du second degré en n de racines et $-(\lambda+1)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n}$$

3.

   - Une fonction polynômiale est développable en série entière (avec $R = +\infty$) . elle est donc du type précédent. S on impose le degré d on doit avoir $a_d \neq 0$ et $a_{d+1} = 0$ ce qui donne $(\lambda+d+1)(\lambda-d)$. Or $\lambda \geq -1/2$ et $d \geq 0$ don $\lambda + d + 1 > 0$. Il existe au plus une solution $\lambda = d$.

     Réciproquement si $\lambda = d$ et $a_0 \neq 0$, alors $\forall n \in [1, d]$ $a_n = \frac{(d+n)(d+1-n)}{n^2} a_{n-1}$ est non nul par récurrence , $a_d = 0$ et pour $n > d$ $a_n = \frac{(d+n)(d+1-n)}{n^2} a_{n-1}$ est nul par récurrence.

$$\boxed{\text{il existe une solution polynômiale de degré } d \text{ ssi } \lambda = d}$$

   - Si on impose $\lambda = d$ et $a_0 = 1$ on a :

$$a_0 = 1 \ , \forall n \geq 1 \ , \ a_n = \frac{(d+n)\,(d+1-n)}{n^2} a_{n-1}$$

     et donc l'unique solution.

$$\boxed{a_0 = 1, \forall n \geq 1, a_n = \frac{[(d+1)(d+2)\cdots(d+n)].[d(d-1)\cdots(d-n+1)]}{(n!)^2}}$$

     On retrouve bien que pour $n \geq d+1$ l'un des facteurs du produit est nul.

     On peut remarquer que les deux [ ] sont des produits de n entiers consécutifs : on a des combinaisons : pour $n \leq$ $a_n = \binom{n+d}{n}\binom{n}{d}$ qui peut se vérifier par récurrence

$$\boxed{\phi_d(x) = \sum_{n=0}^{d} \binom{n+d}{n}\binom{n}{d} x^n}$$

   - Si $d = 1$: $\boxed{\phi_1(x) = 1 + 2x}$. Vérification : $x(x+1)0 + (2x+1)2 - 1.2.(2x+1) = 0$
   - On suppose : $\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1}$. On a alors $a = \lim_0 \left(\frac{8x^2+8x+1}{(x+1)(2x+1)}\right) = 1$, $b = \lim_{-1} \left(\frac{8x^2+8x+1}{x(2x+1)}\right) = 1$ $c = \lim_{-1/2} \left(\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)}\right) = 4$

$$\boxed{\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2x+1}}$$

     la vérification est évidente .

     De même

$$\boxed{\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}}$$

     La vérification est indispensable . Si vous utilisez de façon précise des théorèmes de décompositions en élément simples n'oubliez pas le $\frac{d}{(2x+1)}$ dans la seconde expression.

     Sur $]0, +\infty[$ la fonction ϕ_1 n'a pas de racines. On peut donc faire une variation de la constante : On cherche un solution du type $y(x) = k(x)\phi_1(x)$.

- On a donc :

$$x(x+1)\left[k"(x)\phi_1(x)+2k'(x)\phi_1'(x)+k(x)\phi"_1(x)\right]+(2x+1)\left[k'(x)\phi_1(x)+k(x)\phi_1'(x)\right]-2k(x)\phi_1(x)=0$$

soit

$$x(x+1)(2x+1)k'(x)+\left(8x^2+8x+1\right)k'(x)=0$$

donc

$$k(x)=C_1e^{-\int\frac{8x^2+8x+1}{x(x+1)(2x+1)}dx}=C_1e^{-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x+1}-4\int\frac{dx}{2x+1}}=C_1e^{-\ln(x)-\ln(x+1)-2\ln(2x+1)}=\frac{C_1}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

On retrouve les primitives des fractions de l'étude précédente. Le contraire doit vous inciter à revoir votre calcul. d'où

$$\boxed{y(x)=(2x+1)\left[C_1\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)+\frac{2C_1}{(2x+1)}+C_2\right]\ ,\ (C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2}$$

4. Les hypothèses impliquent : $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\neq 0$ (récurrence)

- On peut donc appliquer la règle de d'Alembert pour $x\neq 0$:

$$\lim_{n->+\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|\right)=\lim\left(\left|\frac{(\lambda+n+1)\,(\lambda-n)}{(n+1)^2}\right|.|x|\right)=|x|$$

donc

$$\boxed{R=1}$$

Ce qui justifie l'existence de solutions de $\mathcal{E}_\lambda$ développables en séries entières.

- Comme au $I.3$ la donnée de a_0 donne une unique suite a_n donc une unique fonction ϕ_λ développable en série entièr et solution de $\mathcal{E}_\lambda$

Comme $a_n=\frac{(\lambda+n)(\lambda+1-n)}{n^2}a_{n-1}$ on a $a_n=\frac{[(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+n)].[\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)]}{(n!)^2}=\frac{\prod_{i=1-n}^{i=n}(\lambda+i)}{(n!)^2}$

- si $\lambda=-1/2$ $a_n=\frac{\prod_{i=1-n}^{i=n}(i-1/2)}{(n!)^2}$

$$\boxed{\phi_{-1/2}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{i=1-n}^{i=n}(i-1/2)}{(n!)^2}x^n}$$

on peut (non demandé ici mais utile au II) expliciter un peu plus :

$$\begin{aligned}\prod_{i=1-n}^{i=n}(i-1/2)&=\frac{\left[(1/2)(3/2)\left(\frac{2n-1}{2}\right)\right].\left[(-1/2)(-3/2)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)\right]}{(n!)^2}\\&=(-1)^n\left[\frac{1.3\cdots(2n-1)}{2^nn!}\right]^2=(-1)^n\left[\frac{(2n)!}{4^nn!^2}\right]^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_{-1/2}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n)!}{4^nn!^2}\right]^2x^n}$$

de même

$$\boxed{\phi_{1/2}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{i=1-n}^{i=n}(i+1/2)}{(n!)^2}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2n-1}\left[\frac{(2n)!}{4^nn!^2}\right]^2x^n}$$

PARTIE 2

ψ est une intégrale à paramètre. Soit f :$\forall(x,t)\in[-1,+\infty[\times[0,\pi/2]$ $f(x,t)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1+x\sin^2(t)}$; On vérifie que pour $x\geq -1$, $x\sin(t)^2\geq -1$ donc f est bien définie et même continue sur $[-1,+\infty[\times[0,\pi/2]$ par composition de fonctions continues.

1. théorème de continuité d'une intégrale à paramètre :

- $\forall t\in[0,\pi/2]$, $x->f(x,t)$ est continue
- $\forall x\in[-1,+\infty[$ $t->f(x,t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$ donc intégrable (continue sur un segment)
- On a domination sur tout segment $[a,b]\in[-1,+\infty[$: $\forall(x,t)\in[a,b]\times[0,\pi/2]$, $|f(x,t)|\leq\frac{2}{\pi}\sqrt{1+b}$ continue don intégrable sur le segment $[0,\pi/2]$

$$\boxed{\psi\text{ est continue sur }[-1,+\infty[}$$

2. théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre:

- $\forall t \in [0, \pi/2]$, $x -> f(x,t)$ est C^∞ sur $]-1,+\infty[$ car $1 + x\sin^2(t) > 0$ et on compose donc des fonctions C^∞
De plus $f(x,t) = \frac{2}{\pi}\left[1 + x\sin(t)^2\right]^{1/2}$, donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\sin(t)^2\left[1 + x\sin(t)^2\right]^{-1/2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\sin(t)^4\left[1 + x\sin(t)^2\right]^{-3/2}$$
et par récurrence
$$\forall k \in \mathbb{N}^* : \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-3}{2}\right)\sin(t)^{2k}\left[1 + x\sin(t)^2\right]^{-\frac{2k-1}{2}}$$
- $\forall x \in]-1,+\infty[$ $t -> \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$ donc intégrable (continue sur un segment)
- on a domination de toutes les dérivées sur tout segment $[a,b] \in]-1,+\infty[$:
$$k \geq 1 \ , \forall (x,t) \in [a,b]\times[0,\pi/2], \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-3}{2}\right)\sin(t)^{2k}\left[1 + a\right]^{-\frac{2k-1}{2}}$$
continue donc intégrable sur le segment $[0,\pi/2]$.
attention pour $k \geq 1$ l'exposant est négatif donc $x -> \left[1 + x\sin(t)^2\right]^{-\frac{2k-1}{2}}$ décroît.
pour $k = 0$ la domination a été prouvée pour la continuité.
$$\psi \in C^\infty\left(]-1,+\infty[, \mathbb{R}\right)$$

3.

- D'après le cours :
$$(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n \text{ avec } R \geq 1$$
pour $\alpha = 1/2$
$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} &= \frac{1.(-1)(-3)\cdots(-(2n-3))}{2^n n!} = (-1)^{n-1}\frac{1.3.\cdots(2n-1)}{(2n-1)2^n n!} \\ &= (-1)^{n-1}\frac{\frac{(2n)!}{2^n n!}}{(2n-1)2^n n!} = (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n (n!)^2}\end{aligned}$$
pour $n = 0$ l'expression précédente donne 1 donc
$$\boxed{\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}u^n}$$
- Si $x \in]-1,1[$ et $t \in [0,\pi/2]$ on a bien $x\sin(t)^2 \in]-1,1[$ donc
$$\sqrt{1 + x\sin(t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}(\sin(t))^{2n}x^n$$
Le problème est donc d'intégrer termes à termes la série pour $t \in [0,\pi/2]$ (danger : ce n'est pas une série entièr
par rapport à t)
Soit $f_n : \forall t \in [0,\pi/2]$, $f_n(t) = (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}(\sin(t))^{2n}x^n$
  - f_n est continue donc intégrable sur le segment $[0,\pi/2]$
  - $\sum f_n$ converge simplement vers $\left(t -> \sqrt{1 + x\sin(t)^2}\right)$ sur $[0,\pi/2]$
  - la convergence est normale car $\sup_{[0,\pi/2]}(|f_n|) \leq \frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}|x|^n$ terme général d'une série convergente (d
  somme $\sqrt{1-x}$)
  si on ne voit pas la somme D'Alembert donne aussi la convergence

On peut donc intégrer termes à termes les f_n :
$$\boxed{\psi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}\int_0^{\pi/2}(\sin(t))^{2n}\,dt\right]x^n}$$
ce qui justifie que ψ est développable en série entière avec $R \geq 1$
remarque on peut aussi prouver que $\sum\int_0^{\pi/2}|f_n|$ converge en majorant $\int_0^{\pi/2}|f_n| \leq \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n(n!)^2}x^n$

- Intégrale de Wallis bien classique:
  On intègre par parties $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^{2n-1} (\sin(t)dt)$: $I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$ d'où $I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$
  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ d'où
  $$I_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3.1}{2^n n!}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2}$$
  Si on reporte dans le développement de ψ on a donc :
  $$\boxed{\psi(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{(2n-1)4^n (n!)^2}.\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\frac{\pi}{2}\right] x^n}$$
  ce qui s'écrit encore vue la question suivante :
  $$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}.\left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\right)^2\right] x^n$$
  remarque : le sujet ne juge pas utile de vous donnez la valeur de I_n , mais dès la question suivante il vous tend un perche pour retomber sur vos pieds.
- Si $v_n = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ on a $v_0 = 1$ et $\frac{v_n}{v_{n-1}} = \frac{(2n)(2n-1)}{4n^2} = \frac{2n-1}{2n} < 1$. La suite décroît à partir de 1 .
- On doit de nouveau intégrer termes à termes une série mais sur un intervalle non compact. soit $f_n(x) = \Big[(-1)^{n-1}\frac{}{(2n}$
  - $f_n(x)$ est continue sur $[-1,1]$ segment . donc f_n est intégrable sur $[-1,1]$ donc aussi sur $]-1,1[$
  - la série $\sum f_n$ converge simplement vers ψ sur $]-1,1[$
  - $\sum \int_{-1}^1 |f_n|$ converge car pour $n \geq 1$ $\int_{-1}^1 |f_n| \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{2n-1}|x|^n dx = \frac{1}{2n-1}\int_0^1 x^n dx = \frac{2}{(2n-1)(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ le séri de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ donc par équivalent et majoration du terme général d'une série à termes positifs $\sum \int_{-1}^1 |f_n$ converge
    On peut donc intégrer termes à termes la séries :
    $$\int_{-1}^1 \psi(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}.\left(\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}\right)^2\right]\int_{-1}^1 x^n dx$$
  Si n est impair $\int_{-1}^1 x^n dx = 0$ et si $n = 2p$ est pair $\int_{-1}^1 x^n dx = \frac{2}{n+1} = \frac{2}{2p+1}$
  $$\boxed{\int_{-1}^1 \psi(x)dx = -2\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{(4p-1)(2p+1)}.\left(\frac{(4p)!}{4^{2p}(2p!)^2}\right)^2\right]}$$

4. Il faut comparer : $(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}.\left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\right)^2$ avec $(-1)^n\left[\frac{(2n)!}{4^n n!^2}\right]^2$ et $(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2n-1}\left[\frac{(2n)!}{4^n n!^2}\right]^2$
   ce qui revient à comparer $\frac{1}{(2n-1)}$ avec (-1) et $\frac{2n+1}{2n-1}$ Or : $\frac{2n+1}{2n-1} - 1 = \frac{2}{(2n-1)}$ donc :
   $$(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)}.\left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left((-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2n-1}\left[\frac{(2n)!}{4^n n!^2}\right]^2 + (-1)^n\left[\frac{(2n)!}{4^n n!^2}\right]^2\right)$$
   soit :
   $$\boxed{\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\phi_{1/2} + \phi_{-1/2}\right)}$$

5. avec le paramétrage donné de l'ellipse $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = a^2\cos(t)^2 + b^2\sin(t)^2$ Donc
   $$l = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2\cos(t)^2 + b^2\sin(t)^2}dt$$
   Il faut revenir à $\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 + x\sin(t)^2 dt}$ donc $\cos(t)^2 = 1 - \sin(t)^2$
   $$l == 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\sin(t)^2}dt = 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - a^2 e^2\sin(t)^2}$$
   car $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Donc $l = 2a\pi\psi(-e^2)$. La relation précédente donne :
   $$\boxed{l = \pi a\left(\phi_{1/2}(-e^2) + \phi_{-1/2}(-e^2)\right)}$$
   cette formule est une vérification de la question précédente ... ou peut être un moyen de "deviner" le résultat de II.4 e comparant l avec l'expression du sujet.

PARTIE 3

une autre intégrale à paramètre.

1. pour tout t réel et tout $x \in [-1,1]$ $\left(1+x\sin(t)^2\right)$ est définie continue et positive donc $f(t)$ est définie.

   f est continue car :

   - $\forall x \in [-1,1]$, $t->\sqrt{1+x\sin(t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$
   - $\forall t \in \mathbb{R}$, $x->\sqrt{1+x\sin(t)^2}$ est continue donc intégrable sur le segment
   - on a domination par $\sqrt{2}$ continue donc intégrable sur le segment

   f est 2π périodique de façon évidente . (et même π périodique)

   $$\boxed{f \in C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

2. dérivation d'un intégrale à paramètre :

   attention au dénominateur nul si $x\sin(t)^2=-1$ donc $x=-1$ et $\sin(t)=\pm 1$. Il faut exclure $x=-1$ et intégrer su $]-1,1]$

   - $\forall x \in]-1,1]$, $t->\sqrt{1+x\sin(t)^2}$ est C^1sur $\mathbb{R}$ de dérivée partielle $t->\frac{x\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+x\sin(t)^2}}$
   - $\forall t \in \mathbb{R}$, $x->\sqrt{1+x\sin(t)^2}$ est continue donc intégrable sur le segment $[-1,1]$ donc aussi sur $]-1,1]$
   - $\forall t \in \mathbb{R}-\{\pi/2+k\pi\}$, $x->\frac{x\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+x\sin(t)}}$ est continue donc intégrable sur le segment $[-1,1]$ donc aussi sur $]-1,1]$
   - $\forall t \in \{\pi/2+k\pi\}$, $x->\frac{x\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+x\sin(t)}}=0$ est continue donc intégrable sur le segment $[-1,1]$ donc aussi sur $]-1,1$
   - On a domination: : $\begin{cases} \text{si } t \in \mathbb{R}-\{\pi/2+k\pi\} : \left|\frac{x\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+x\sin(t)}}\right| \leq \frac{|\sin(t)\cos(t)|}{\sqrt{1-\sin(t)^2}} = |\sin(t)| \leq 1 \\ \text{si } t \in \{\pi/2+k\pi\}, \left|\frac{x\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{1+x\sin(t)}}\right| = 0 \leq 1 \end{cases}$ .Donc pour tout t domination par 1 continue sur $[-1,1]\cdots$

   $$\boxed{f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

3. f étant $C^1_{2\pi}$ la série de Fourier de f converge normalement vers f

   de plus $f(-t)=f(t)$ donc la série de Fourier de f est $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt)$

   f étant π périodique $f(t+\pi)=f(t)$ et donc $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n\cos(nt)$. l'unicité d développement en série de Fourier d'une fonction $C^1_{2\pi}$ montre que $a_n=(-1)^n a_n$ et donc que si n est impair $a_n=0$.

   On peut aussi montrer que $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt=\int_\pi^{3\pi} f(u)\cos(nu+n\pi)du=(-1)^n\int_0^{2\pi} f(u)\cos(nu)du$ car f est 2 périodique.

   $$\boxed{f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty} a_2\cos(2kt)}$$

4. On a $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt$. Or $f\pi-t)=f(t)$ donc $\int_0^{\pi/2} f(t)dt=\int_{\pi/2}^{\pi} f(t)dt$ /

   $$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x\sin(t)^2}dx\right)dt$$

   On intègre une fonction continue sur un rectangle . Le théorème de Fubini donne :

   $$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+x\sin(t)^2}dt\right)dx=\int_{-1}^{1}\psi(x)dx$$

   Le résultat du II.3.5 (qui est dans le sujet) donne donc :

   $$\boxed{a_0=-2\sum_{p=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{(4p-1)(2p+1)}\cdot\left(\frac{(4p)!}{4^{2p}(2p!)^2}\right)^2\right]}$$