ESSEC 2001

Math 1

partie I

1. Les fonctions $t \mapsto (\cos(t))^{2p}$ et $t \mapsto t^2\left(\cos(t)\right)^{2p}$ sont pour $p \geq 0$ continues sur le segment $[0,\pi/2]$ .les intégrales proposées existent donc .

   a)La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $[0,\pi/2]$. Le graphe de la courbe est donc au dessus de la corde joignant $(0,0)$ et $(\pi/2,1)$: $\forall t \in [0,\pi/2]$, $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$. D'où le résultat

   b1)J_p est l'intégrale d'une fonction positive . C'est donc un réel positif.

   b2)D'après la question précédente : $t^2 \leq \frac{\pi^2}{4}\sin(t)^2 = \frac{\pi^2}{4}\left(1-\cos(t)^2\right)$. Si on multiplie cette égalité par $\cos(t)^{2p}$ et si on intègre sur $[0,\pi/2]$ on a bien : $J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_p - I_{p+1}\right)$

   c)L'intégration par partie proposée est valide car u et v sont C^1.On a alors :

   $$I_{p+1} = \left[\sin(t)\cos(t)^{2p+1}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}(2p+1)\sin(t)^2\cos(t)^{2p}dt = 0 + (2p+1)\left(I_p - I_{p+1}\right)$$

   D'où : $\boxed{(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p}$

   d)De la question b) on déduit:

   $$0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \left(1 - \frac{I_{p+1}}{I_p}\right)$$

   On en déduit donc avec la question c):

   $$0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right)$$

   Le majorant et le minorant tendent vers 0 donc : $\boxed{\lim_{+\infty}\left(\frac{I_p}{J_p}\right) = 0}$

   Remarque : les intégrales I_p sont des intégrales de Wallis . Par convergence monotone leur limite est nulle.

2. **a)**On intègre par partie dans I_p en posant $u(t) = t$, $v(t) = \cos(t)^{2p}$ qui sont bien C^1 . On a alors pour $p \geq 1$:

   $$I_p = 2p\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos(t)^{2p-1}dt$$

   On recommence avec $u(t) = t^2/2$ et $v(t) = \sin(t)\cos(t)^{2p-1}$.On a dans ce cas

   $$v'(t) = \cos(t)^{2p} - (2p-1)\sin(t)^2\cos(t)^{2p-2}$$

   soit compte tenu de $\sin^2 = 1 - \cos^2$, $v'(t) = 2p\cos(t)^{2p} - (2p-1)\cos(t)^{2p-2}$. Ce qui donne:

   $$I_p = p\left[\left((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p\right]\right.$$

   b)On a alors sachant $(2p-1)I_{p-1} = 2pI_p$ (question 1c) et le résultat précédent:

   $$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{(2p-1)J_{p-1}}{2pI_p} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{(2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p}{2pI_p} = \frac{1}{2p^2}$$

   c)Or $J_0 = \int_0^{\pi/2} t^2 dt = \frac{\pi^2}{12}$ et $I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = 1$ donc $\frac{J_0}{I_0} = \frac{\pi^2}{12}$.

   On a alors $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = 2\sum_{p=1}^n\left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}\right) = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_{p+1}}{I_{p+1}}$. Or $\frac{J_n}{I_n}$ tend vers 0 d'après 1d donc:

   $$\boxed{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

partie II

1. **a)**Δ est linéaire et c'est un endomorphisme car si f est continue $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est continue et si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$

   b)Si $v_p = \Delta f(p) = f(p+1) - f(p)$ on a $\sum_{p=1}^{n} v_p = f(n+1) - f(1)$. Et comme f admet une limite nulle en $+\infty$ la série converge et $\sum_{p=1}^{\infty} \Delta f(p) = \lim_{p->+\infty}(f(p)) - f(1)$

$$\underline{\sum \Delta f(p) \text{ converge et } \sum_{p=1}^{\infty} \Delta f(p) = -f(1)}$$

   De même $\sum_{p=n+1}^{\infty} \Delta f(p) = -f(n+1)$

   c)

$$\Delta f_{k-1}(x) = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+k)} - \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k-1)} = \left(\frac{1}{(x+1)\cdots(x+k-1)}\right)\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x}\right) = -kf_k(x)$$

   On a donc :

$$\boxed{\Delta f_{k-1} = -kf_k}$$

   d)Les fonctions f_k pour $k \geq 1$ sont continues de limite nulle en $+\infty$ donc $\sum \Delta f_k$ est une série convergente.

   - On a donc pour $k \geq 2$ la convergence de $\sum f_k(p)$ par produit par -$\frac{1}{k}$ d'une série convergente. De plus

$$\sum_{p=n+1}^{\infty} f_k(p) = -\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{\infty} \Delta f_{k-1}(p) = \frac{f_{k-1}(n+1)}{k} = \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}$$

   - Pour $k = 1$ on ne peut pas introduire f_0 .Mais $f_1(p) = \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ .On a donc

$$\sum_{p=n+1}^{N} f_1(p) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N} \to_{N\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

     et le résultat reste vrai si $k = 1$
   - *Remarque : le cas particulier compte au moins autant que le cas général.*

2. **a)** La formule se vérifie par récurrence:

   - Si $q = 1$: $\frac{1}{p^2} - f_1(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{1}{p}f_1(p)$
   - Si la formule est vraie au rang q on suppose :

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p)$$

   - On a alors:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p) - q!f_{q+1}(p) = q!\left(\frac{1}{p^2(p+1)\cdots(p+q)} - \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q+1)}\right)$$

     soit

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1}(k-1)!f_k(p) = q!\left(\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q)}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+q+1}\right) = q!\left(\frac{1}{p(p+1)\cdots(p+q+1)}\right)\left(\frac{q+1}{p(p+q+1)}\right)$$

   - D'où la relation voulue à l'ordre $q+1$.

$$\boxed{\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p)}$$

   b)Toutes les séries étant convergentes on peut faire la somme de $p = n+1$ à $p = \infty$ des inégalités précédentes :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!\sum_{p=n+1}^{\infty} f_k(p) = q!\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{f_q(p)}{p}$$

   Le membre de droite est une somme de nombres positifs donc est positif

Dans le membre de gauche on utilise le résultat de II1 pour calculer la somme . Dans celui de droite on majore en écrivant que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{n+1}$:

$$\boxed{0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)} \leq q! \frac{1}{(n+1)} \frac{1}{q} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+q)}}$$

c) Reste à revenir à $\sum \frac{1}{p^2}$.

On a

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)} + r_q(n)$$

avec

$$0 \leq r_q(n) \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$$

$$\boxed{S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}}$$

3. si $q = 2$: $S'_2 = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ et $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$