CONCOURS TA EPREUVE DE MATH 2

PREMIERE PARTIE

1.

- On a $\forall i \in [[1,n]], P(z_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_i^k = 0$. En faisant la somme des égalités pour i variant de 1 à n on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k S_k + n a_0 = 0}$$

  En effet pour $k > 0$ on a :$a_k(z_1^k + \cdots + z_n^k) = a_k S_k$ et pour $k = 0$ $(a_0 + \cdots + a_0) = n a_0$

- En multipliant par z_i^{p-n} (possible car $p - n > 0$) on a : $\forall i \in [[1,n]], z_i^{p-n} P(z_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k z_i^{p-n+k} = 0$. En faisant la somme des égalités pour i variant de 1 à n on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k S_{p-n+k} = 0}$$

2. pour $n = 2$ on a : le polynôme : $a_2 X^2 + a_1 X^1 + a_0$.On sait par le cours que $\boxed{S_1 = z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}}$. (on peut le retrouver si besoin est en prenant $p = 1$ dans la formule admise qui suit)

   D'après la première relation de I1 on a $a_2 S_2 + a_1 S_1 + 2a_0 = 0$ soit $S_2 = \frac{-a_1 S_1 - 2a_0}{a_2}$

$$\boxed{S_2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 - 2\left(\frac{a_0}{a_2}\right)}$$

   classique : $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$

   D'après I2 avec $p = 3$ on a $a_2 S_3 + a_1 S_2 + a_0 S_1 = 0$ d'où :

$$\boxed{S_3 = -\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 + 3\frac{a_0 a_1}{a^2}}$$

DEUXIEME PARTIE

1. On a :

$$\left(e^{ix2n+1}\right) = \cos\left((2n+1)\,x\right) + i \sin\left((2n+1)\,x\right)$$

   mais aussi:

$$\left(e^{ix}\right)^{2n+1} = \left(\cos(x) + i\sin(x)\right)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(i\sin(x)\right)^k \left(\cos(x)\right)^{2n+1-k}$$

   Pour trouver $\sin\left((2n+1)\,x\right)$ on prend la partie imaginaire , ce qui se limite aux valeurs impaires de k .En posant $k = 2p+1$ on a alors :

$$\sin\left((2n+1)\,x\right) = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \left(\sin(x)\right)^{2p+1} \left(\cos(x)\right)^{2n-2p}$$

   En divisant par $\left(\sin(x)\right)^{2n+1}$ non nul par hypothèse , il reste :

$$\boxed{\frac{\sin((2n+1)x)}{(\sin(x))^{2n+1}} = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} \left(\mathrm{cotan}(x)^2\right)^{n-p}}$$

   En particulier pour $p = 0$ on a que P est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(2n+1)$

2. Soit z une racine réelle positive de P . Comme $x \to \mathrm{cotan}^2(x)$ est une bijection de $]0, \pi/2]$ sur $\mathbb{R}^+$ il existe $x \in]0, \pi/2]$ tel que $z = \mathrm{cotan}^2(x)$. On a alors $P(z) = 0 \Longleftrightarrow \sin\left((2n+1)\,x\right) = 0 \Longleftrightarrow (2n+1)x \equiv 0(\pi)$

   On a donc n valeurs possibles de x 2 à 2 distinctes distincts . Comme on a une bijection on a donc aussi n valeurs possibles de x 2 à 2 distinctes distincts de z.

$$\boxed{\text{Les racines réelles positives de } P \text{ sont les } z_k = \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\ ,\ k \in [[1,n]]}$$

   On a trouvé n racines distinctes pour un polynôme de degré n .On a donc trouvé toutes les racines du polynôme et elle sont simples:

$$\boxed{P = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X - \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$$

3. S_1 est la somme des racines de P donc $S_1 = -\frac{p_{n-1}}{p_n} = \frac{\binom{2n+1}{3}}{(2n+1)} = \frac{n(2n-1)}{3}$

   On sait que pour tout x tel que $\sin(x) \neq 0$ on a $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \text{cotan}^2(x)$.

   En prenant pour x les n racines de P et en faisant la somme des relations : $S'_1 = S_1 + n$

$$\boxed{S_1 = \frac{n(2n-1)}{3} , S'_1 = \frac{n(2n+2)}{3}}$$

4. Pour le polynôme P on a : $a_n = C^1_{2n+1}$, $a_{n-p+k} = (-1)^{p-k}\binom{2n+1}{2(p-k)+1}$ .En reportant dans la relation admise après I2 (possible car $p \leq n$) on a donc :

$$\binom{2n+1}{1}S_p - \binom{2n+1}{3}S_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-k}\binom{2n+1}{2(p-k)+1}S_k + \cdots + (-1)^{p-1 2n+1}\binom{2n+1}{2p-1}S_1 + (-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}p = 0$$

   où encore :

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{2n+1}{2(p-k)+1}S_k + (-1)^p\binom{2n+1}{2p+1}p = 0$$

   En isolant le premier terme et en changeant de membre tous les autres on a :

$$\boxed{(2n+1)S_p = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k+1}\binom{2n+1}{2(p-k)+1}S_k + (-1)^{p+1}\binom{2n+1}{2p+1}p}$$

5. On veut d'abord montrer par récurrence la convergence des suites $\left(\frac{S_k}{nk}\right)$ pour $k \in [[1, ..p]]$:

   - Pour $p = 1$ on étudie la suite $\left(\frac{S_1}{n^2}\right) = \left(\frac{(2n-1)}{3n}\right)$. On a un quotient de deux polynômes en n de même degré . La suite converge (vers le quotient des termes de plus haut degré)
   - Supposons que pour $1 \leq k \leq p-1$ la suite$\left(\frac{S_k}{n^{2k}}\right)$ converge .On a alors :

$$\frac{S_p}{n^{2p}} = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k+1}\frac{\binom{2n+1}{2(p-k)+1}S_k}{(2n+1)n^{2p}} + (-1)^{p+1}\frac{\binom{2n+1}{2p+1}p}{(2n+1)n^{2p}}$$

     Pour montrer la convergence de cette combinaison linéaire il suffit de montrer la convergence de chaque terme:

     -

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{2n+1}{2p-2k+1}S_k}{(2n+1)n^{2p}} &= \frac{(2n+1)!}{(2n+1)(2n-2p-2k)!(2p-2k+1)!}\frac{S_k}{n^{2p}} \\
&= \frac{1}{(2p-2k+1)!}\frac{(2n)(2n-1)\cdots(2n-2p-2k+1)}{n^{2p-2k}}\frac{S_k}{n^{2k}}
\end{aligned}$$

       . On sait déjà que $\left(\frac{S_k}{n^{2k}}\right)$ est une suite convergente . De plus Quand n varie (p et k étant constant) le second facteur est le quotient de deux polynômes en n de degré $(2p-2k)$ .Ce premier facteur définit donc une suite convergente de limite le quotient des termes de plus haut degré soit 2^{2p-2k} . Le deuxième facteur est une constante.
     - De même:

$$\frac{\binom{2n+1}{2p+1}p}{(2n+1)n^{2p}} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(2n-2p+1)}{n^{2p}}.\frac{p}{(2p+1)!}$$

       On a le quotient de deux polynômes en n de degré $2p$.
     - *Remarque: Si on essaye la formule de Stirling on a une expression qui se simplifie difficilement.*
   -

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{S_p}{n^{2p}}\right) \text{ converge}}$$

   - Les calculs précédents permettent aussi de trouver la limite par récurrence en utilisant la linéarité de la limite :

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{1}{3} , \forall p \geq 1, \alpha_p = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p-k+1}\frac{2^{2p-2k}}{(2p-2k+1)!}\alpha_k + (-1)^{p+1}\frac{2^{2p}}{(2p+1)!}p}$$

     On vérifie que pour $k = 1$: $(-1)^{p-k+1}\frac{2^{2p-2k}}{(2p-2k+1)!}\alpha_k = (-1)^p\frac{2^{2p-2}}{(2p-1)!}\alpha_1$. On vérifie aussi avec le sujet pour $k = p-1$.
   - On sait déjà $\alpha_1 = \frac{2}{3}$.
     On a pour $p = 2$: $\alpha_2 = \frac{4}{6}\alpha_1 - \frac{16}{120}2 = \frac{8}{45}$
     et pour $p = 3$: $\alpha_3 = \frac{4}{6}\alpha_2 - \frac{16}{120}\alpha_1 + \frac{64}{7!}3 = \frac{64}{945}$

- remarque : et tout cela sans machine à calculer
- remarque: l'expression du sujet suffit pour trouver ces valeurs numériques même sans le terme général.

6. Avec l'indication du sujet on a :

$$\frac{1}{(\sin(\theta))^{2p}} = \frac{\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)^p}{(\sin(\theta))^{2p}} = \frac{\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(\cos(\theta))^{2k}(\sin(\theta))^{2p-2k}}{(\sin(\theta))^{2p}} = \frac{1+\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(\text{cotan}(\theta))^{2p}}{(\sin(\theta))^{2p}}$$

On remplace θ par $\frac{i\pi}{2n+1}$ et on fait la somme de $i=1$ à $i=n$

$$\boxed{S\prime_p = \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}S_k + n}$$

On a $S'_p = S_p + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k S_k + n$.Donc en isolant le premier terme :

$$\frac{S'_p}{n^{2p}} = \frac{S_p}{n^{2p}} + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{\binom{p}{k}}{1}.\frac{S_k}{n^{2k}}.\frac{1}{n^{2p-2k}} + \frac{1}{n^{2p-1}}$$

- $\frac{S_p}{n^{2p}}$ tend vers α_p
- pour $k \in [[1,p-1]]\, m$, $\frac{\binom{p}{k}}{1}.\frac{S_k}{n^{2k}}.\frac{1}{n^{2p-2k}}$ tend vers $\frac{\binom{p}{k}}{1}.\alpha_k.\frac{1}{+\infty} = 0$ (car $p-k>0$)
- $\frac{1}{n^{2p-1}}$ tend vers 0 car $p \geq 1$

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{S'_p}{2^{2p}}\right) \text{ converge et sa limite est } \alpha_p}$$

TROISIEME PARTIE

1. Sur $]0,\pi/2[$ les quantités sont positives . Il suffit donc de comparer leurs inverses et de montrer :

$$x \in [0,\pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$$

Or la droite $y=x$ et la tangente en $x=0$ aux graphes de sin et tan .Par concavité de sin et convexité de tan on a donc l'inégalité voulue.

Si on élève ces inégalités à la puissance $2p$ et si on remplace x par $\frac{k\pi}{2n+1}$ on a :

$$\left(\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^{2p} \leq \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p}\frac{1}{k^{2p}} \leq \frac{1}{\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^{2p}}$$

On fait la somme de $i=1$ à n :

$$S_p \leq \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p}\xi_n(2p) \leq S'_p$$

Et comme $\left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^{2p} = \left(\frac{2}{\pi}.\frac{n+1/2}{}\right)^{2p}$ on a bien :

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p}\frac{S_p}{(n+1/2)^{2p}} \leq \xi_n(2p) \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p}\frac{S'_p}{(n+1/2)^{2p}}}$$

2. Il n'y a plus qu'à passer à la limite en remarquant que

$$\frac{S_p}{(n+1/2)^{2p}} = \frac{S_p}{(n)^{2p}}\left(\frac{1}{1+1/(2n)}\right)^{2p}$$

La deuxième parenthèse tend vers 1 . Donc

$$\lim\left(\frac{S_p}{(n+1/2)^{2p}}\right) = \alpha_p$$

On en fait autant pour S'_p

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2p}\alpha_p}$$

En particulier :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi 4}{90}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}}$$