

Remarque : le début des parties 2 et étudie une décomposition en "éléments simples" d'une fraction dans un cas particulier avec des racines multiples. c'est à dire dans un cas où l'interpolation de Lagrange n'est pas utilisable.

Remarque : on fera attention aux notations pas tout à fait usuel. L'indéterminée des polynômes et des fractions rationnelles est notées  $x$  ; la notation  $X$  représentant une matrice.

### PARTIE 1

1. Le sujet demande de montrer le théorème de division euclidienne.

- existence : On fait une récurrence forte sur le degré de  $g$  :

– si  $d^\circ(g) \leq 2, q = 0, f = g$  est solution

– si la propriété est vraie pour tout polynôme  $g_0$  de degré  $\leq n-1$ . alors soit  $g = \sum_{k=0}^n g_n x^n$  un polynôme de degré

$n$ . on prend  $g_0 = g - g_n x^{n-3} P(x)$ . On obtient un polynôme de degré  $\leq n-1$  qui se décompose  $g_0 = Pq_0 + f_0$ ,  $f_0 \in \mathbb{C}_2[X]$  et alors  $g = P(g_n x^{n-3} + q_0) + f_0$ . D'où l'existence de la décomposition.

- unicité : si on a deux décompositions  $g = Pq + f = PQ + F$  avec les conditions de degré alors  $P(q - Q) = F - f$  et le degré donne  $d^\circ(q - Q) < 0$  et comme on a un polynôme  $q - Q = 0$  donc  $q = Q$  puis  $f = F$

$$\boxed{\forall g \in \mathbb{C}[X], \exists!(q, f) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_2[X], g = Pq + f}$$

2. Soit  $m \in \mathbb{C}$ . On pose  $Q(x) = P(x) - P(m)$ . Comme  $Q(m) = 0$ , le polynôme  $x - m$  divise  $Q(x)$  dans  $\mathbb{C}[X]$  il existe  $f(x)$  (le quotient) tel que  $Q(x) = (x - m)f(x)$ . Si on regarde le degré  $d^\circ(P) = 3$  donc  $d^\circ(f) = 2$

$$\boxed{\frac{P(x) - P(m)}{x - m} = f(x) \text{ est un élément de } \mathbb{C}_2[X]}$$

3. question de cours sur les polynômes matriciels:

- $\varphi(1) = 1.I$
- On vérifie que  $\varphi$  est linéaire
- Puis par bilinéarité (à justifier) que comme  $X^i X^j = X^{i+j}$  on a  $\varphi(A) \circ \psi(A) = (\varphi\psi)(A)$

$$\boxed{\varphi \text{ est morphisme d'algèbre de } \mathbb{C}[X] \text{ dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})}$$

### PARTIE 2

1. Comme  $\deg(f) \leq 2$ , le théorème de Taylor donne  $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$ , donc en divisant par  $P(x)$

$$\boxed{\frac{f(x)}{P(x)} = f(a) \frac{1}{(x - a)^3} + f'(a) \frac{1}{(x - a)^2} + \frac{f''(a)}{2} \frac{1}{(x - a)}}$$

2. D'après I2 on sait que  $f(x) = \frac{P(x) - P(m)}{x - m}$  est un polynôme de degré 2 que l'on peut calculer:

$$\begin{aligned} P(x) - P(m) &= (x - a)^3 - (m - a)^3 \\ &= ((x - a) - (m - a))((x - a)^2 + (x - a)(m - a) + (m - a)^2) \\ &= (x - m)((x - a)^2 + (x - a)(m - a) + (m - a)^2) \end{aligned}$$

donc :

$$\frac{P(x) - P(m)}{x - m} = (x - a)^2 + (x - a)(m - a) + (m - a)^2$$

et en divisant par  $P(x) = (x - a)^3$ :

$$\boxed{\frac{f(x)}{P(x)} = (m - a)^2 \frac{1}{(x - a)^3} + (m - a) \frac{1}{(x - a)^2} + \frac{1}{(x - a)}}$$

3. .

1. Le calcul donne  $\Phi_X(x) = (1-x)^3$ . La matrice  $X$  admet 1 pour unique valeur propre. Si  $X$  était diagonalisable,  $X$  serait donc semblable à donc égale à  $I$ , absurde :

La matrice  $X$  n'est pas diagonalisable.

Le calcul donne :  $\boxed{(X-1)^3 = 0}$

2. Le calcul donne  $\det(X-mI) = (1-m)^3$  donc  $X-mI$  est inversible si et seulement si  $m \neq 1$ .

On suppose donc que  $m \neq 1$ . Nous considérons le polynôme :

$$f(x) = \frac{(x-1)^3 - (m-1)^3}{x-m}$$

On a  $(x-m)f(x) = (x-1)^3 - (m-1)^3$ , donc, en utilisant 1.3 (avec  $A = X$ ),

$$(X-m)f(X) = (X-I)^3 - (m-1)^3 I = -(m-1)^3 I$$

d'où  $(X-m)^{-1} = \frac{-1}{(m-1)^3} f(X)$

Or 2.2 (avec  $a = 1$ ) donne, après multiplication par  $P(x) = (x-1)^3$ ,

$$f(x) = \alpha(m, 1) + \beta(m, 1)(x-1) + \gamma(m, 1)(x-1)^2$$

d'où:

$$f(X) = \alpha(m, 1)I + \beta(m, 1)(X-I) + \gamma(m, 1)(X-I)^2$$

et finalement :

$$\boxed{(X-m)^{-1} = \frac{1}{1-m}I - \frac{1}{(1-m)^2}(X-I) + \frac{1}{(1-m)^3}(X-I)^2}$$

### PARTIE 3

1. Soit  $f(x)$  un polynôme de degré  $\leq 2$ . On veut donc décomposer

$$f(x) = \alpha_1 f(a)(x-b) + (\beta_1 f(a) + \beta_2 f'(a))(x-a)(x-b) + \gamma_1 f(b)(x-a)^2$$

Une analyse, synthèse doit être possible mais la vérification ne me semble pas simple. je préfère montrer l'existence d'une décomposition puis la calculer:

On vérifie que  $(x-b), (x-a)(x-b), (x-a)^2$  est une base de  $\mathbb{C}_2[X]$  :

- la famille a le bon cardinal
- elle est libre : si pour tout  $x$   $A(x-b) + B(x-a)(x-b) + C(x-a)^2 = 0$ , alors  $x = a$  donne  $A = 0$  (car  $b \neq a$ ), puis  $x = b$  donne  $C = 0$  et donc  $B = 0$
- On peut donc décomposer  $f(x) = A(x-b) + B(x-a)(x-b) + C(x-a)^2$  et alors :

-  $x = a$  donne  $A = \frac{f(a)}{a-b}$

-  $x = b$  donne  $C = \frac{f(b)}{(b-a)^2}$

- puis on regarde et dérive :

$$\frac{f(x)}{x-b} = A + B(x-a) + C \frac{(x-a)^2}{(x-b)}$$

donc

$$\frac{(x-b)f'(x) - f(x)}{(x-b)^2} = B + C \frac{2(x-a)(x-b) - (x-a)^2}{(x-b)^2}$$

la valeur en  $x = a$  donne :

$$B = \frac{(a-b)f'(a) - f(a)}{(a-b)^2}$$

Finalement :

$$\boxed{\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{1}{(a-b)} \frac{f(a)}{(x-a)^2} + \frac{-\frac{1}{(a-b)^2} f(a) + \frac{1}{a-b} f'(a)}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)^2} \frac{f(b)}{x-b}}$$

2. Soit  $g$  un polynôme (quelconque) de  $\mathbb{C}[X]$ . On applique la division euclidienne du 1.1 :

$$g = Pq + f \quad \text{avec } q \in \mathbb{C}[X] \quad \text{et } f \in \mathbb{C}_2[X]$$

d'où on déduit :

$$\frac{g(x)}{P(x)} = q(x) + \frac{f(x)}{P(x)}$$

Comme  $g = Pq + f$  et  $P(a) = P(b) = 0$  on a  $g(a) = f(a)$  et  $g(b) = f(b)$ .

Mais comme  $a$  est racine double de  $P$  en dérivant :  $g' = P'q + Pq' + f'$  et donc  $g'(a) = f'(a)$

De plus  $f \in \mathbb{C}_2[X]$  donc on déduit de 3.1 que

$$\boxed{\frac{g(x)}{P(x)} = q(x) + \frac{1}{(a-b)} \frac{g(a)}{(x-a)^2} + \frac{-\frac{1}{(a-b)^2}g(a) + \frac{1}{a-b}g'(a)}{(x-a)} + \frac{1}{(b-a)^2} \frac{g(b)}{x-b}}$$

3.

1. Le calcul montre que le polynôme caractéristique de  $X$  est  $\Phi_X(x) = (2-x)(x-1)^2$ . Les valeurs propres sont donc 2, de multiplicité 1, et 1, de multiplicité 2. Comme

$$X - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 \\ -4 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le rang de  $X - I$  est égal à 2 donc la dimension du sous-espace propre  $E_1$  associé à la valeur propre 1 est égale à  $1 < 2$  (ordre de multiplicité de la valeur propre 1) : La matrice  $X$  n'est pas diagonalisable.

Le calcul donne :  $(X - I)^2(X - 2I) = 0$

2. On applique 3.2 avec  $g(x) = x^n$ ,  $a = 1$  et  $b = 2$ :

$$\frac{x^n}{P(x)} = q(x) - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{-1-n}{(x-a)} + \frac{2^n}{x-b}$$

On a donc  $x^n = P(x)q(x) - (x-2) - (n+1)(x-1) + 2^n(x-1)^2$ . En passant aux polynômes matriciels et en utilisant  $P(X) = 0$ , on obtient :  $X^n = -(X-2I) - (n+1)(X-I)(X-2I) + 2^n(X-I)^2$  et avec  $n = 1995$

$$\boxed{X^{1995} = -(X-2I) - (1996)(X-I)(X-2I) + 2^{1995}(X-I)^2}$$

4.

1. Le calcul montre que :  $X^2(X - I) = 0$

2. le calcul donne  $\det(X - mI) = m^2(1 - m)$  donc  $X - m$  est inversible si et seulement si  $m \notin \{0, 1\}$ .

3. On suppose que  $m \notin \{0, 1\}$ . On pose  $P(x) = x^2(x-1)$  et  $f(x) = \frac{P(x) - P(m)}{x-m} = x^2 + (m-1)x + m(m-1)$ . En utilisant les résultats de 3.1 avec  $a = 0$ ,  $b = 1$  et  $f(x) = x^2 + (m-1)x + m(m-1)$ , on obtient :

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{m(1-m)}{x^2} + \frac{1-m^2}{x} + \frac{m^2}{x-1}$$

et donc

$$f(x) = m(1-m)(x-1) + (1-m^2)x(x-1) + m^2x^2$$

Comme  $(x-m)f(x) = P(x) - P(m)$  et  $P(X) = 0$  on a l'égalité

$$(X - m)f(X) = -P(m)$$

donc, puisque  $P(m) = m^2(m-1) \neq 0$ :

$$(X - m)^{-1} = \frac{-f(X)}{P(m)} = \frac{-f(X)}{m^2(m-1)}$$

et par suite :

$$(X - mI)^{-1} = \frac{(X - I)}{m} + \frac{m+1}{m^2} (X^2 - X) - \frac{X^2}{m-1}$$