# Concours PT2004 Maths I-B

Même si le sujet ne l'a pas posé on utilisera : $\forall A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})\ A^0 = I_r$

## partie A

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_2$ et $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in S_2$ on a $AB = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$

   - Les 4 coefficients de AB sont sommes et produit de réels positifs , donc sont des réels positifs.
   - de plus

$$\begin{aligned}(ax+bz)+(ay+bt) &= a\,(x+y)+b(z+t)\\ &= a+b \text{ car } B\in S_2\\ &= 1 \text{ car } A \in S_2\end{aligned}$$

   de même pour la seconde ligne.

   - enfin $ax+bz = 1-(ay+bt) \le 1$ (car $ay+bt \ge 0$ ) . De même $ay+bt \le 1$ , $cx+dz \le 1$ , $cy+dt \le 1$

,$\boxed{S_2 \text{ est stable par le produit matriciel.}}$

2. **(a)**

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2$$

en regardant les termes non diagonaux puis les termes diagonaux.

**(b)** Par récurrence :

- On pose $a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = \frac{5}{6}, b_2 = \frac{1}{6}$ ce qui donne : $A = a_1 A + b_1 I_2.$ , $A^2 = a_2 A + b_2 I_2.$

On suppose que, $A^n = a_n A + b_n I_2$, alors :

$$A^{n+1} = A.A^n = a_n A^2 + b_n A = a_n\left(\frac{5}{6}A + \frac{1}{6}I_2\right) + b_n A = \left(\frac{5}{6}a_n + b_n\right)A + \frac{1}{6}a_n I_2$$

ce qui donne :

$$\forall n \ge 1,\ A^n = a_n A + b_n I_2,\ a_1 = 1 b_1 = 0,\ a_{n+1} = \frac{5a_n}{6} + b_n\ ,\ b_{n+1} = \frac{a_n}{6}$$

**(c)** On constate :

$$\forall n \ge 1,\ a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$$

Donc la suite est constante : $\forall n \ge 1,\ a_n + b_n = a_1 + b_1 = 1$; et donc :

$$\forall n \ge 1,\ a_{n+1} = -\frac{a_n}{6} + 1\ ,\ b_{n+1} = -\frac{b_n}{6} + \frac{1}{6}$$

**(d)** on cherche le point fixe $l = 1 - \frac{l}{6}$ d'où $l = \frac{6}{7}$ on a alors

$$\forall n \ge 1,\ a_{n+1} - \frac{6}{7} = \left(-\frac{a_n}{6} + 1\right) - \frac{6}{7} = -\frac{a_n}{6} + \frac{1}{7} = -\frac{1}{6}(a_n - l)$$

La suite $(a_n - l)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ initialisée à $a_1 - l = \frac{1}{7}$

$$\forall n \ge 1,\ a_n = \frac{6}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

et donc

$$\forall n \ge 1 : b_n = 1 - a_n = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

On peut vérifier :

$$b_{n+1} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\left(\frac{6}{7} + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right) = \frac{a_n}{6}$$

**(e)** $A^n = a_n A + (1-a_n)I_2 = I_2 + a_n(A - I_2)$ donne

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} - \frac{2}{21}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} & \frac{4}{7} + \frac{2}{21}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\ \frac{3}{7} + \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} & \frac{4}{7} - \frac{1}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1} \end{pmatrix}}$$

**(f)** La limite des coefficients ne pose pas de problème :
Les 4 coefficients sont sur $[0,1]$ et la somme par ligne vaut bien 1 :

$$\boxed{A^\infty = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \in S_2}$$

3. **(a)** .
Le polynôme caractéristique vaut :

$$\begin{aligned} P_b(\lambda)) &= \det(A - \lambda I_3) = \left(\frac{4}{9} - \lambda\right) \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} - \lambda \end{vmatrix} \text{ (développement par rapport à la dernière colonne)} \\ &= \left(\frac{4}{9} - \lambda\right)\left(\lambda^2 - \frac{26}{21}\lambda + \frac{5}{21}\right) = \left(\frac{4}{9} - \lambda\right)(1-\lambda)\left(\frac{5}{21} - \lambda\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les trois valeurs propres de } B \text{ sont } \lambda_1 = \frac{5}{21} < \lambda_2 = \frac{4}{9} < \lambda_3 = 1}$$

**(b)** La matrice $B$ a son polynôme caractéristique scindé à racines simples . $B$ est diagonalisable et semblable à

$$D = \begin{pmatrix} \frac{5}{21} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**(c)** On cherche les 3 sous espaces propres qui sont obligatoirement des droites . les calculs ne posent pas de problèmes :

- $E_{4/9}(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est évident .
- $E_1(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $E_{5/21}(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$
- On a donc

$$B = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

le calcul donne alors :

$$P^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

puis :

$$\boxed{B^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 7\left(\frac{5}{21}\right)^n + 9 & -7\left(\frac{5}{21}\right)^n + 7 & 0 \\ -9\left(\frac{5}{21}\right)^n + 9 & 9\left(\frac{5}{21}\right)^n + 7 & 0 \\ 7\left(\frac{5}{21}\right)^n - 16\left(\frac{4}{9}\right)^n + 9 & -7\left(\frac{5}{21}\right)^n + 7 & 16\left(\frac{4}{9}\right)^n \end{pmatrix}}$$

*Remarque : A vérifier si* $n = 1$

**(d)** On a donc que la suite$(B^n)$ converge et que : :

$$\boxed{B^\infty = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \\ 9 & 7 & 0 \end{pmatrix}}$$

qui est bien dans $S_2$

4. **(a)** $C$ est triangulaire donc les valeurs propres sont ses éléments diagonaux :$\frac{1}{2}$, de multiplicité 2, et 1 simple.

**(b)** On constate que $J^3 = J^2$ et donc que la suite est stationnaire :

$$\forall n \geq 2,\ J^n = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**(c)** de façon évidente.

$$C = \frac{1}{2}(I_3 + J)$$

Comme la matrice identité $I_3$ commute avec $J$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\forall n \geq 2,\ C^n &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k I_3^{n-k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^k = \frac{1}{2^n}\left(I_3 + nJ + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}J^2\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(I_3 + nJ + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}J^2 - J^2 - nJ^2\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(I_3 + nJ + 2^n J^2 - J^2 - nJ^2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{C^n = \left(\frac{1}{2^n}\right)\begin{pmatrix} 1 & n & 2^n - n - 1 \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$$

vrai aussi si $n = 1$ .

**(d)** Comme $n << 2^n$ le passage à la limite ne pose pas de problème :

$$\boxed{C^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

qui est bien dans $S_3$

## partie B

1. Soit $A = (a_{ij}) \in S_r$, $B = [b_{ij}] \in S_r$. Posons $C = AB = (c_{ij})$.

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, r\}^2,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

- $C$ est à coefficients positifs, comme sommes et produits de réels positifs
-

$$\forall i \in [[1, r]],\ \sum_{j=1}^{r} c_{ij} = \sum_{j=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{r}\left(a_{ik}\underbrace{\sum_{k=1}^{r} b_{kj}}_{=1}\right) = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} = 1$$

- On en déduit alors

$$\forall (i,j) \in [[1, r]]^2\ ,\ c_{i,j} = 1 - \sum_{k \neq j} c_{i,k} \leq 1$$

$$\boxed{S_r \text{ est stable par produit}}$$

$S_r^+$ est alors aussi stable car une somme et un produit de réels strictement positif est strictement positif.

*remarque : on ferra attention que aucun de ses deux ensembles n'est un sous espace vectoriel. Il n'est stable ni par addition ni par produit par un scalaire.*

2.

**(a)** Une récurrence simple,:

- $A \in S_r$ par hypothèse
- Si $A^n \in S_r$ alors $A^{n+1} = A^n.A \in S_r$ d'après la stabilité par produit de $S_r$ :

$$\boxed{A \in S_r \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n \in S_r}$$

**(b)** *il doit y avoir un vecteur propre évident* :On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ : $\forall j$ , $U_j = 1$

$$(AU)_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} = 1 = U_i$$

$\underline{1 \text{ est valeur propre de } A, \text{ un vecteur propre associé étant } U}$

**(c)** On suppose que $A^\infty$ existe::

- $$\forall (i,j) \in \{1,\ldots,r\}^2,\ a_{ij}^{\infty} = \lim_{n\to+\infty}\left(a_{ij}^{(n)}\right) \geq 0$$

  comme limite de quantités positives.

- $$\forall i \in \{1,\ldots,r\},\ \sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{\infty} = \sum_{j=1}^{r} \lim_{n\to+\infty}\left(a_{ij}^{(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^{(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty}(1) = 1$$

  d'après la linéarité de la limite et le fait que pour tout $n$ $A^n \in S_r$

- et donc tous les coefficients de $A^\infty$ sont plus petit que 1.

$$\boxed{A^\infty \in S_r}$$

On a bien sûr :

$$A^{n+1} = AA^n = A^n A$$

et donc en passant à la limite dans le produit : $\boxed{A^\infty = AA^\infty. = A^\infty A.}$

3. Soit $M = (m_{ij})$, une matrice à diagonale strictement dominante. Supposons qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, tel que $MX = 0$. Il existe donc $i_0 \in \{1,\ldots,r\}$, tel que $|x_{i_0}| = \max_{1\leq j\leq r}(|x_j|)$.(tout ensemble fini de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément)

Comme $X \neq 0$, nécessairement $|x_{i_0}| > 0$ et donc en prenant la $i_0-$ième composante de l'égalité $MX = 0$ :

$$\sum_{j=1}^{r} m_{i_0 i_0} x_j = 0 \text{ soit } m_{ii_0 j} x_{i_0} = -\sum_{j\neq i_0} m_{i_0 i_0} x_j$$

Si on utilise la valeur absolue :

$$|m_{i_0 i_0}|\,|x_{i_0}| \leq \sum_{j\neq i_0} |m_{i_0 j}|\,|x_j|$$

En divisant par $|x_{i_0}| > 0$, on obtient sachant $j \neq i_0 \Longrightarrow |x_j| \leq |x_{i_0}|$:

$$|m_{i_0 i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |m_{i_0 j}| \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq \sum_{j \neq i_0} |m_{i_0 j}|$$

Or $|m_{i_0 i_0}| \leq \sum\limits_{j \neq i_0} |m_{i_0 j}|$ contredit l'hypothèse que $M$ est une matrice à diagonale strictement dominante.

Donc, si $M$ est une matrice à diagonale strictement dominante :

$$MX = 0 \Longrightarrow X = 0$$

Ainsi $\ker M = \{0\}$. Ce qui équivaut à dire que

$$\boxed{\text{toute matrice à diagonale strictement dominante est inversible.}}$$

4. **(a)** On considère $A = (a_{ij}) \in S_r^*$. On pose $B = A - I_r$. La matrice carrée $C$ obtenue en supprimant les dernière ligne et colonne de $B$ est d'ordre $(r-1)$.

$$\begin{aligned}
\forall i &\in \{1, \ldots, (r-1)\}, \\
|c_{ii}| &= |a_{ii} - 1| = 1 - a_{ii} \text{ car } a_{ii} \leq 1 \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{r} a_{ij} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{r-1} a_{ij} \text{ car } a_{i,r} > 0 \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{r-1} |c_{ij}| \text{ car } a_{i,j} > 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{C \text{ est à diagonale strictement dominante.}}$$

**(b)** On sait que 1 est valeur propre de $A$, un vecteur propre associé étant $U$. On va montrer, dans le cas où $A \in S_r^*$, le sous-espace propre associé à 1 est une droite.

Il suffit donc de montrer que $\text{Ker}(A - I_r)$ est de dimension 1 , donc que $A - I_r$ est de rang $r - 1$.

Soit $(C_i)_{i=1}^r$ les colonnes de $A - I_r$ . Si on a une combinaison linéaire $\sum\limits_{k=1}^{r-1} \lambda_k C_k = 0$ , on a $r$ équations à $r - 1$ inconnues.

Si on retire la dernière ligne on obtient un système homogène de matrice $C$ , donc un système de Cramer ($C$ est à diagonalz strictement dominante donc est inversible) ayant une unique solution : la solution nulle . Donc les $(C_i)_{i=1}^{r-1}$ forment un système libre et donc $rg(A - I_r) \geq r - 1$ . Mais on sait que la matrice n'est pas inversible donc $rg(1 - I_r) = r - 1$ .

$$\boxed{\text{Si } A \in S_r^+ \text{ , } E_1(A) = \text{Vect}(U)}$$

**(c)** Si $\lambda$ est une valeur propre de $A$ , $A - \lambda I_r$ n'est pas inversible. , donc n'est pas à diagonale strictement dominante. On a donc :

$$|a_{i,i} - \lambda| \leq \sum_{\substack{jj=1 \\ j \neq ii}}^{r} |a_{i,j}| = \sum_{\substack{jj=1 \\ j \neq ii}}^{r} a_{i,j} = 1 - a_{i,i} \text{ car } a_{i,j} \geq 0$$

**suite par la géométrie :** Le point d'affixe $\lambda$ est donc à l'intérieur du cercle de centre le point d'affixe $a_{i,i}$ (situé sur l'intervalle de l'axe réel $]0, \&[$ ) et de rayon $1 - a_{ii}$ . Ce cercle est tangent intérieurement au point d'affixe 1 au cercle de centre $O$ et de rayon 1.Donc $\lambda$ est de module au plus 1 , et si $\lambda$ est de module 1 on a $\lambda = 1$.

**suite par le calcul :** On a $|\lambda| = |\lambda - a_{ii} + a_{ii}| \leq (1 - a_{ii}) + a_{ii} = 1$ . Si $|\lambda| = 1$ , il existe $\theta$ tel que $\lambda = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ l'inégalité précédente donne alors :

$$(a_{ii} - \cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 \leq (1 - a_{ii})^2$$

soit comme $a_{i,i} > 0$

$$\cos(\theta) \geq 1$$

et donc la seule solution $\theta = 0[2\pi]$ donc $\lambda = 1$

$$\boxed{\text{si } A \in S_r^*, \text{ 1 est la seule valeur propre de module 1, les autres sont de module strictement inférieur à 1.}}$$

5. Comme en **4.C:** $|a_{i,i} - \lambda| \leq 1 - a_{i,i}$ d'où $|\lambda| = |\lambda - a_{ii} + a_{ii}| \leq (1 - a_{ii}) + a_{ii} = 1$

$$\boxed{\text{si } A \in S_r, \text{ 1 est seule valeur propre , les autres sont de module inférieur à 1.}}$$

Comme on est dans les complexes , le polynôme caractéristique est scindé et le déterminant est le produit des valeurs propres.

$$\boxed{|\det(A)| \leq 1}$$

6. Montrons par récurrence sur $r$, que, pour toute matrice $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, telle que :

$$(\mathcal{P})\, \forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2,\, m_{ij} \in ]0,1[ \,\text{et}\, \forall i \in \mathbb{N}_r,\, \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \leq 1$$

on a $|\det M| < 1$.

- Pour $r = 1$, la propriété est claire, le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 1 étant égal à son unique coefficient.
- Faisons l'hypothèse de récurrence : toute matrice d'ordre $r - 1$, dont tous les termes sont strictement compris entre 0 et 1 dont la somme des termes de chaque ligne est inférieure ou égale à 1 a son déterminant en module strictement inférieur à 1. Soit $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $(\mathcal{P})$. Toutes les matrices extraites d'ordre $(r - 1)$ vérifient aussi $(\mathcal{P})$.
  Développons le déterminant de $M$ par rapport à la première ligne :
  $$\det M = \sum_{j=1}^{r} a_{1j}(-1)^{1+j} D_{1j}$$
  Les $D_{1j}$ étant des déterminants de sous-matrices carrées d'ordre $(r - 1)$ de $A$ vérifient, d'après l'hypothèse de récurrence :$\forall j \in \mathbb{N}_r$, $|D_{1j}| < 1$. Comme les $a_{1j}$ sont strictement positifs :
  $$|\det M| \leq \sum_{j=1}^{r} a_{1j}|D_{1j}| < \sum_{j=1}^{r} a_{1j} \leq 1 \Longrightarrow |\det M| < 1$$
  On a montré par récurrence sur $r$, que, pour toute matrice $M = [m_{ij}] \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, telle que :
  $$(\mathcal{P})\, \forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2,\, m_{ij} \in ]0,1[ \,\text{et}\, \forall i \in \mathbb{N}_r,\, \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \leq 1$$
  on a $|\det M| < 1$.
  Pour une matrice stochastique stricte la propriété $(\mathcal{P})$ est vérifiée (les coefficients sont bien $< 1$ car sur une ligne on a des coefficients strictement positifs de somme 1)
  $$\boxed{A \in S_r^* \Longrightarrow |\det M| < 1}$$

7. *Remarque : si la matrice est diagonalisable la décomposition $M^n = PD^nP^{-1}$ associée à l'étude du module des valeurs propres donne vite le résultat.*

**(a)** Soit $A = (a_{ij}) \in S_r^*$. Les coefficients ont un minimum $\alpha > 0$.(tout sous ensemble fini non vide de $\mathbb{R}$ admet un plus petit élément). . On pose $\varepsilon = \min(\alpha, \dfrac{1}{3})$.

**(b)** Comme $A^{n+1} = AA^n$, alors :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_r^2,\, a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} a_{kj}^{(n)}$$

**(c)** Comme $\forall i \in \mathbb{N}_r$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik} = 1$, on peut écrire :

$$a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{r} \underset{\geq \varepsilon}{a_{ik}} \underbrace{\left(a_{kj}^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right)}_{\geq 0} \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\left(a_{kj}^{(n)} - \alpha_j^{(n)}\right)}_{\geq 0}$$

Cette somme de termes positifs est supérieure ou égale à chacun de ses termes, en particulier à celui qui donne le plus grand coefficient de la colonne $j$ :

$$a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}) = \varepsilon \gamma_j^{(n)}$$

De même :

$$\beta_j^{(n)} - a_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{r} \underset{\geq 0}{a_{ik}} \underbrace{\left(\beta_j^{(n+1)} - a_{kj}^{(n)}\right)}_{\geq 0} \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{r} \underbrace{\left(\beta_j^{(n+1)} - a_{kj}^{(n)}\right)}_{\geq 0}$$

Cette somme de termes positifs est supérieure ou égale à chacun de ses termes en particulier :

$$\beta_j^{(n)} - a_{ij}^{(n+1)} \geq \varepsilon(\beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)}) = \varepsilon\gamma_j^{(n)}$$

**(d)** Soit $j \in \mathbb{N}_r$.

- par définition on a $\alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)}$
- par le **c)**

$$\forall i\ , a_{ij}^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)} \text{ car } a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon\gamma_j^{(n)} \geq 0$$

  on a un minorant indépendant de $i$ donc $\alpha_j^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)}$
- de même $\beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)}$

$$\boxed{\alpha_j^{(n)} \leq \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)}}$$

- On a aussi

$$\forall i\ ,\ a_{ij}^{(n+1)} - \alpha_j^{(n)} \geq \varepsilon\gamma_j^{(n)}$$

  donc $a_{ij}^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)} + \varepsilon\gamma_j^{(n)}$ encore un minorant indépendant de $i$ : $\alpha_j^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)} + \varepsilon\gamma_j^{(n)}$ et de même $\beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)} - \varepsilon\beta_j^{(n)}$ . on multiplie la seconde inégalité par $-1$ et on ajoute des inégalités de même sens :

$$\alpha_j^{(n+1)} - \beta_j^{(n+1)} \geq \alpha_j^{(n)} - \beta_j^{(n)} + 2\varepsilon\gamma_j^{(n)} \Longrightarrow -\gamma_j^{(n+1)} \geq -\gamma_j^{(n)} + 2\varepsilon\gamma_j^{(n)}$$

  D'où :

$$\boxed{\gamma_j^{(n+1)} \leq \gamma_j^{(n)}(1 - 2\varepsilon)}$$

**(e)** Par une récurrence évidente , :

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)} = \gamma_j^{(n)} \leq (1 - 2\varepsilon)^{(n-1)}\gamma_j^{(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

comme $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ on a $1 - 2\varepsilon \in ]0, 1[$ et donc $\lim_{n->+\infty} (1 - 2\varepsilon) = 0$

$$\boxed{\gamma_j^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

**(f)** Pour tous $i, j$ on a $\gamma_j^{(n)} = \beta_j^{(n)} - \alpha_j^{(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\alpha_j^{(n)} \leq \alpha_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n+1)} \leq \beta_j^{(n)}$.

Les suites adjacentes $(\alpha_j^{(n)})$ et $(\beta_j^{(n)})$ convergent vers la même limite.

or pour tout $i$ : $\alpha_j^{(n)} \leq a_{i,j}^{(n)} \leq \beta_j^{(n)}$ , et donc par encadrement entre deux suites convergentent de même limite , les suites $a_{i,j}^{(n)}$ convergent.

$$\boxed{\text{la suite } (A^n) \text{ converge .}}$$

**(g)** .On remarque que pour $j$ fixé l'encadrement ne dépend pas de $i$ . Toutes les suites $(a_{ij}^{(n)})$ convergent vers la même limite $l_j \geq 0$.

$$\boxed{\text{toutes les lignes de } A^\infty \text{ sont identiques.}}$$

De plus d'après la question B-2-(c), la matrice $A^\infty$ est stochastique. Donc $\boxed{\sum_{j=1}^{r} l_j = 1}$.

8. Le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - \frac{1}{5})^2$. $A$ admet 1 et $-\frac{1}{5}$ ( double) , de module strictement inférieur à 1, pour valeurs propres.

   La matrice $A$ est bien élément de $S_3^*$. $A^\infty$ existe et elle est stochastique. Ses lignes sont égales.

   De plus ici, ${}^tA \in S_3^*$ aussi, donc ${}^tA^\infty$ existe, est stochastique , ses lignes sont identiques. Or, par linéarité de la transposition : $({}^tA)^\infty =^t (A^\infty)$. Donc, les colonnes de $A^\infty$ sont identiques :Tous les coefficients de $A^\infty$ sont égaux et elle est stochastique les coefficients valent $\frac{1}{3}$ .Ainsi :

$$A^\infty = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$