ENSI Physique 1987

Une lecture rapide du sujet montre que le thème principal est l'étude des racines d'une matrice .
Dans la première partie on s'oriente vers l'étude des racines carrées dans le cas d'une matrice diagonalisable
On commence donc par réfléchir à quelques exemples:

- $f^2 = Id$ caractérise les symétries .Les solutions de $M^2 = I_n$ sont donc toutes les matrices des symétries.
- $M^2 = 0_n$ caractérise , outre la matrice nulle , les matrices nilpotentes d'ordre 2 .
- un projecteur vérifie $p^2 = p$ donc est sa propre racine carrée (ce qui ne veut pas dire l'unicité de la solution)
- Sans doute à travers les exercices que vous avez pu travaillé hors cours avez vous d'autres exemples en tête.

Dans les autres parties on travaille sur l'exemple de B . Une étude très rapide de cette matrice montre qu'elle est non diagonalisable et donc que ces parties sont très probablement indépendantes de la première . Ces parties conduisent progressivement à la question IV4 qui donne la forme générale de B^r (avec $x = 1, y = 2, z = 3$) .Cette question où figure enfin la forme explicite des solutions est donc un outil clé pour vérifier les calculs précédents . Il est important de la repérer avant de commencer la seconde partie .

1. PARTIE

On notera $Diag(x_1, \cdots, x_n)$ la matrice diagonale de diagonale $x_1, \cdots, x_n$

1. Si M est diagonalisable il existe une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.

   On a alors $A = M^2 = PD^2P^{-1}$. Comme D est diagonale D^2 est aussi diagonale donc A est diagonalisable.

   $$\boxed{M \text{ diagonalisable} \Rightarrow M^2 \text{ diagonalisable}}$$

2. Si A est diagonalisable il existe une matrice $D = Diag(x_1, \cdots x_n)$ diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$. Comme on est dans les complexes tout élément admet au moins une racine carrée:

   $$\forall i \in [1..n], \exists y_i \in \mathbb{C}, y_i^2 = x_i$$

   Remarque:*N'oubliez pas que dans le complexes la notation* $\sqrt{}$ *n'est pas légitime*

   Soit alors $M = PDiag(y_1, \cdots y_n)P^{-1}$. Cette matrice est diagonalisable de carré A.

   $$\boxed{\text{Toute matrice diagonalisable admet une racine carrée diagonalisable}}$$

3. Evident $\underline{MA = AM = M^3}$

   En général une question aussi évidente vaut 0 au barème . Elle a seulement comme but d'orienter la réflexion du candidat. Ici ça commute donc ... il y a plein de S.E.V. stables .

4.
   1. Si μ est valeur propre de ϕ alors il existe un vecteur x non nul tel que $\phi(x) = \mu x$. On a alors $\phi^2(x) = \mu^2 x$. Et comme x est non nul μ^2 est valeur propre de ϕ^2.
   2. Même chose si x est vecteur propre de ϕ , le même calcul montre que x est vecteur propre de ϕ^2.

      La réciproque est fausse:On prend une symétrie autre que $\pm Id$ tout vecteur est propre pour le carré mais pas pour la symétrie

5.
   1. - (1) $\Leftrightarrow$ (2) est du cours (à rédiger en début de problème)
      - (3) $\Leftrightarrow$ (4) est la même propriété pour ϕ^2
      - (1) $\Leftrightarrow$ (4) en passant par le déterminant . Comme $\det(\phi^2) = (\det(\phi))^2$ on a :

      $$\phi \text{ non injective} \Leftrightarrow \det(\phi) = 0 \Leftrightarrow \det(\phi^2) = 0 \Leftrightarrow \phi^2 \text{ non injective}$$

      $$\boxed{\text{Les 4 propositions sont équivalentes}}$$

   2. Le*s dimensions des S.E.V. ne sont pas connue donc:*

      On vérifie l'inclusion , la somme et l'unicité *(ou l'intersection):*

- $Ker(\phi - \mu Id) \subset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
  Soit $v \in Ker(\phi - \mu Id)$ on a alors :$\phi(v) = \mu v$ donc $\phi^2(v) = \mu^2 v = \lambda v$ et donc $v \in Ker(\phi^2 - \lambda Id)$
- $Ker(\phi + \mu Id) \subset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
  Idem car $(-\mu)^2 = \lambda$
- $Ker(\phi - \mu Id) + Ker(\phi + \mu Id) \subset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
  Conséquence directe des inclusions qui précédent.
- $Ker(\phi - \mu Id) + Ker(\phi + \mu Id) \supset Ker(\phi^2 - \lambda Id)$:
  Soit $x \in Ker(\phi^2 - \lambda Id)$ On cherche $x = x_1 + x_2$,$x_1 \in Ker(\phi - \mu Id), x_2 \in Ker(\phi + \mu Id)$
  - analyse:Si x_1 et x_2 existent on a $\phi(x_1) = \mu x_1$ et $\phi(x_2) = -\mu x_2$ donc $\phi(x) = \mu(x_1 - x_2)$. On peut donc résoudre : (possible car $\lambda \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0$)

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\phi(x)}{\mu}\right), x_2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\phi(x)}{\mu}\right)$$

  - synthèse:
    On a bien $x_1 + x_2 = x$ de façon évidente .
    De plus $x_1 \in Ker(\phi - \mu Id)$ car $\phi(x_1) = \frac{1}{2}\left(\phi(x) + \frac{\phi^2(x)}{\mu}\right) = \frac{1}{2}\left(\phi(x) + \frac{\lambda x}{\mu}\right) = \mu x_1$ car $\lambda = \mu^2$
    De même $x_2 \in Ker(\phi + \mu Id)$
  - *Ne négligez surtout pas la synthèse . C'est le seul endroit où servent les hypothèses.*
- Le calcul précédent montre l'unicité de la décomposition de x donc prouve que la somme est directe:

$$\boxed{Ker(\phi^2 - \lambda Id) = Ker(\phi - \mu Id) \oplus Ker(\phi + \mu Id)}$$

3. Si ϕ^2 est diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres

$$E = \oplus_{i=1}^{p}(Ker(\phi^2 - \lambda_i Id)$$

   Notons μ_i un complexe tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$
   - Si 0 n'est pas valeur propre de ϕ on peut appliquer le calcul précédent à chaque sous espace propre:

$$E = (\oplus_{i=1}^{p}(Ker(\phi - \mu_i Id)) \oplus (\oplus_{i=1}^{p}(Ker(\phi + \mu_i Id))$$

     E est somme directe des sous espaces propres de ϕ donc ϕ est diagonalisable
     de plus $Ker(\phi) = \ker(\phi^2) = \{0\}$
   - Le seul cas à problème est le cas ou ϕ n'est pas injective . A l'ordre près on peut supposer $\lambda_p = 0$

$$E = \left(\oplus_{i=1}^{p-1}(Ker(\phi^2 - \lambda_i Id)\right) \oplus Ker(\phi^2)$$

$$E = \left(\oplus_{i=1}^{p-1}(Ker(\phi - \mu_i Id)\right) \oplus \left(\oplus_{i=1}^{p-1}(Ker(\phi + \mu_i Id)\right) \oplus Ker(\phi^2)$$

     Si $Ker(\phi^2) = Ker(\phi)$ on retrouve que E est somme directe des sous espaces propres de ϕ donc que ϕ est diagonalisable.
     Si ϕ est diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres de ϕ . Or si μ est valeur propre de ϕ μ^2 est valeur propre de ϕ^2 d'après I4 . Donc $\mu = 0$ ou il existe i tel que $\mu = \pm\mu_i$.

$$E = \left(\oplus_{i=1}^{p-1}(Ker(\phi - \mu_i Id)\right) \oplus \left(\oplus_{i=1}^{p-1}(Ker(\phi + \mu_i Id)\right) \oplus Ker(\phi)$$

     $Ker(\phi)$ et $Ker(\phi^2)$ ont donc la même dimension . Et comme l'inclusion $Ker(\phi) \subset Ker(\phi^2)$ est évidente on aura l'égalité.

$$\boxed{(\phi^2 \text{ diagonalisable }) \Rightarrow (\phi \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow Ker(\phi) = Ker(\phi^2))}$$

6. Si f possède m valeurs propres distinctes f est diagonalisable et les sous espaces propres sont des droites . D'après la question I3 f et ϕ commutent donc les sous espaces propres de f sont stables par ϕ .Mais une droite stable est engendrée par un vecteur propre . Donc tout vecteur propre de f est un vecteur propre de ϕ .

   Donc dans une base de vecteurs propres de f où $Mat(f) = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$, $Mat(\phi) = Diag(\pm\mu_1, \cdots, \pm\mu_m)$ avec les notations précédentes . Comme tout complexe admet au plus 2 racines carrées f admet au plus 2^m racines carrées.

   et même exactement 2^m si *0 n 'est pas valeur propre et* 2^{m-1} *sinon .*

7. C'est une application de la question précédente . Les calculs ne sont pas rédigés ici.

   A est diagonalisable de valeurs propres $-1, 1$ et 4 .Il existe donc 8 solutions au problème .

   En finissant de diagonaliser $A = PDP^{-1}$ avec $P := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Les 8 solutions sont cherchées sont donc $P \begin{pmatrix} \varepsilon_1 i & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_3 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} & \frac{i\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2} & 0 \\ \frac{i\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2} & \frac{i\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\varepsilon_3 \end{pmatrix}$ avec $\forall i \in [1..3], \varepsilon_i = \pm 1$

   On remarque que les matrices trouvées sont deux à deux opposées .Leur somme est nul et leur produit est A^4.

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 256 \end{pmatrix}$$

8.

   1. Si λ est une valeur propre de multiplicité $k \geq 2$ la matrice de f dans une base de vecteurs propres sera du type :

$$\begin{pmatrix} \lambda I_k & (0) \\ (0) & M' \end{pmatrix}$$

      Soient alors S la matrice d'une symétrie en dimension k, μ une racine carrée de λ et N une racine carrée de M' qui existe d'après I2 car M' est diagonalisable . Alors $\begin{pmatrix} \mu S & (0) \\ (0) & N \end{pmatrix}$ est une racine carrée de M .Or comme $k \geq 2$ il existe une infinité de symétries (prendre les symétries par rapport à une droite) donc une infinité de racines carrés pour M .

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est diagonalisable et admet une valeur propre multiple il existe une infinité de racines carrés}}$$

   2. Même principe dans une bonne base f a la matrice $\begin{pmatrix} (0)_k & (0) \\ (0) & M' \end{pmatrix}$ Si T est nilpotente d'indice 2 alors $\begin{pmatrix} T & (0) \\ (0) & N \end{pmatrix}$ est une racine carrée de M .Or il existe une infinité de matrice T :Prendre (e_i) une base de vecteurs propres et pour tout réel α ϕ_T telle que $\phi_T(e_1) = \alpha e_2$ et pour $i > 1$ $\phi_T(e_i) = \vec{0}$

$$\boxed{\text{Si 0 est valeur propre multiple il existe une infinité de racines carrées}}$$

2. PARTIE

1. B est triangulaire . Son spectre est donc l'ensemble des termes diagonaux . 1 est la seule valeur propre . Si B est diagonalisable B est semblable à I_3 donc $B = PI_3P^{-1} = I_3$. Absurde

$$\boxed{B \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

2.

   1. On remarque que $J^2 = K, J^3 = K^2 = 0$ et $JK = KJ = 0$. On a donc $(yJ + zK)^2 = y^2 K$ et pour $p > 2$, $(yJ + zK)^p = 0$
   2. xI commute avec $yJ + zK$ on a donc par le binôme de Newton

$$(xI + yJ + zK)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} (yJ + zK)^p = \sum_{p=0}^{2} C_n^p x^{n-p} (yJ + zK)^p$$

      puisque les autres termes sont nuls . Et donc

$$(xI + yJ + zK)^n = x^n I + nx^{n-1}(yJ + zK) + x^{n-2}\frac{n(n-1)}{2} y^2 K$$

      Ou encore

$$\boxed{\forall n \geq 2, (C(x, y, z))^n = C(x^n, nx^{n-1}y, nx^{n-1}z + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2)}$$

      Et vous avez tous vu que IV4 donne la forme général de B^r .
      Peut-être avez trouvé un résultat qui ne concorde pas avec IV4 . N'espérez pas trop quand même que la réponse à la question IV4a soit non . Calculez alors B^2, B^3 à la main pour vérifier .

3. $B = C(1,2,3)$ donc pour $n \geq 2$

$$\boxed{B^n = C(1, 2n, 3n + 2n(n-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Le résultat reste vrai pour $n = 0$ et $n = 1$

On a là la vérification des calculs précédents en prenant $n = 2$ et $n = 3$ si on n'a pas vu IV4 .

3. Le déterminant de B vaut 1 donc B est inversible .

Un peu d'habitude de ce genre d'exercice laisse penser que la formule vraie dans $\mathbb{N}$ l'est aussi dans $\mathbb{Z}$. On rédige donc :

Par cohérence avec la formule précédente posons pour $n < 0$, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et vérifions $B^n B^{-n} = I$. *(Le calcul du produit de matrice devant être explicitement poser dans la copie) .*

Avec un peu moins d'habitude on rédige un pivot de Gauss , comme la matrice est triangulaire ça va vite .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, B^n = C(1, 2n, 3n + 2n(n-1)) = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. PARTIE

1.

1. Les produits par B : $M \to MB$ et $M \to BM$ sont linéaires donc aussi $M \to MB - BM$. Donc $F = Ker(M \to MB - BM)$ est un sous espace vectoriel de E.
2.

- f et ϕ commutent donc les sous espaces propres de f sont stables par ϕ . Or $E_1(f) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc M est du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}$. Le calcul explicite des coefficients de $MB - BM$ donne alors $a = d = g, b = e$.
  (Le sujet donnant la réponse ce calcul doit être détaillé) . Donc $M = aI + bJ + cK$
- (I, J, K) engendre le commutant F de B .
- En regardant la première ligne de $\lambda I + \mu J + \nu K = 0$ on trouve $\lambda = \mu = \nu = 0$ donc le système est libre . Etant générateur , c'est une base .
- La famille $\left(I, B, B^2\right)$ a le bon cardinal , Elle est incluse dans le commutant de B . Il suffit donc de vérifier qu'elle est libre . Or

$$\lambda I + \mu B + \nu B^2 = \begin{pmatrix} \lambda+\mu+\nu & 2\mu+4\nu & 3\mu+10\nu \\ 0 & \lambda+\mu+\nu & 2\mu+4\nu \\ 0 & 0 & \lambda+\mu+\nu \end{pmatrix}$$

  Le système en (μ, ν) est de déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ donc $\mu = \nu = 0$ et en reportant sur la diagonale $\lambda = 0$.

$$\boxed{F = Vect(I, J, K) = Vect(I, B, B^2)}$$

3. Les matrices de F sont du type $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Leur spectre est réduit à $\{a\}$ et comme au II1 elles sont diagonalisables si et seulement si ce sont des matrices d'homothétie .

$$\boxed{M \in F \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow M \in Vect(I)}$$

2.

1. Cette question a déjà simplifié le calcul à la question précédente . Les seuls vecteurs propres de f sont les vecteurs du type $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$ qui sont bien propre pour ϕ .

   La réciproque est fausse par exemple si ϕ est une homothétie .

   Remarque : La réciproque est vraie ssi $\phi - Id$ est de rang 2 c'est à dire ssi le coefficient sur J dans la base (I, J, K) est non nul .

2. Si $\phi(x) = \lambda x$ alors $\phi(f(x)) = \phi \circ f(x) = f \circ \phi(x) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
De plus $f(x) \neq \vec{0}$ car $x \neq \vec{0}$ et f est un automorphisme . Donc

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est propre pour } \phi \text{ alors } f(x) \text{ est propre pour } \phi}$$

3.

1. Les droites stables sont engendrées par les vecteurs propres . Il existe une seule droite stable $Vect\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
2. Les plans (hyperplans) stables ont une équation du type $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ avec

$$(a,b,c) \neq (0,0,0) \text{ et } \exists \mu \in \mathbb{C}, (a,b,c)\, B = \mu\,(a,b,c)$$

Le système se résout en transposant et comme B est triangulaire il n'y a aucun problème .Il existe un unique plan stable d'équation $x_3 = 0$

3.
   - Le résultat est évident pour les sous espaces triviaux $\{\vec{0}\}$ et $\mathbb{C}^3$.
   - le résultat est déjà connu pour la droite puisque c'est le sous espace propre .
   - Pour le plan il suffit de vérifier que $(0,0,1)\, C(x,y,z) = x\,(0,0,1)$. Le plan est stable par ϕ .
   - La réciproque est fausse en particulier si ϕ est une homothétie car alors tous les sous espaces sont stables par ϕ.

4. PARTIE

1.

1. Si $M^p = B$ alors $MB = BM = M^{p+1}$ donc $M \in F$
2. On a $(\det(M))^p = \det(M^p) = \det(B) = 1$ donc $\det(M)$ est une racine $p-$ème de l'unité :

$$\boxed{\exists k \in [0..p-1]\,, \det(M) = e^{2ik\pi/p}}$$

2.

1. Si p est impair et M réelle alors $\det(M) = 1$. Comme on sait que $M \in F$ on peut poser $M = C(x,y,z)$ le déterminant donne donc $x^{3p} = 1$ donc $x = 1$ .Reste à résoudre $(C(1,y,z))^p = C(1,2,3)$. Mais d'après II2 on doit résoudre $C(1, py, pz + \frac{p(p-1)}{2} y^2) = C(1,2,3)$ et comme (I,J,K) est un système libre il reste à résoudre

$$\begin{cases} py = 2 \\ pz + \frac{p(p-1)}{2} y^2 = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } p \text{ est impair } M^p = B \text{ admet une seule solution réelle } C(1, \tfrac{2}{p}, \tfrac{2+p}{p^2})}$$

2. Si p est paire on a le même calcul si $x = 1$. Mais cette fois ci $\det(x)$ peut aussi valoir -1 . Au quel cas le système devient :

$$\begin{cases} -py = 2 \\ -pz + \frac{p(p-1)}{2} y^2 = 3 \end{cases}$$

de solution $-C(1, \frac{2}{p}, \frac{2+p}{p})$ (*ce qui n'est pas surprenant*)

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, B^{1/p} = C(1, \tfrac{2}{p}, \tfrac{2+p}{p^2})}$$

Remarque 1 : Et on se précipite à la question 4 pour vérifier les calculs .
Remarque2:C'est une notation usuelle ...mais c'est la première fois que l'on parle de puissance non entière d'une matrice . On peut espérer étendre des résultats connues dans les réels mais il faudra tous les prouver.

3. On résout dans les complexes maintenant $C(x^p, pyx^{p-1}, pzx^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} y^2 x^{p-2}) = C(1,2,3)$. Soit , toujours à cause de la base : $\begin{cases} x^p = 1 \\ pyx^{p-1} = 2 \\ pzx^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} y^2 x^{p-2} = 3 \end{cases}$ .On a donc $x = \exp(2ik\pi/p), y = \frac{2}{px^{p-1}} = \frac{2x}{p}$ puis $z = (\frac{2+p}{p^2})x$.

$$\boxed{M^p = B \Leftrightarrow \exists k \in [0..p-1]\,, M = e^{\frac{2ik\pi}{p}} B^{1/p}}$$

On trouve donc exactement p solutions distinctes à l'équation.
Remarque ce qui n'est pas évident du tout . L'étude des racines carrés dans le cas diagonalisable a montré qu'il y a en général plus de 2 solutions à l'équation $M^2 = A$.

3. Notons $M_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}} B^{1/p}$.

   - $\sum_{k=0}^{p-1} M_k = \left(\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}}\right) B^{1/p} = 0$
   - $\prod_{k=0}^{p-1} M_k = \left(\prod_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}}\right) \left(B^{1/p}\right)^p = (-1)^{p-1} B$
   - *La somme est le produit des racines p−ème de l'unité est classique . Si le résultat n'est pas connu utiliser le fait que c'est la somme et le produit des racines de l'équation $X^p - 1 = 0$*

4.

   1. Oui et comme vous n'oubliez jamais de lire tout le sujet avant de commencer à travailler ça fait longtemps que vous avez vérifier ce "détail" , sinon que de temps perdu .
   2. On utilise la règle de calcul

      $$C(a,b,c).C(a',b',c') = C(aa', ab' + a'b, ac' + bb' + ca')$$

      qui se vérifie en multipliant les matrice 3×3

      - $\forall (r,s) \in \mathbb{R}^2, C^{r+s} = C^r C^s$ car

        $$C^r C^s = C \left(\begin{array}{c} x^r x^s, x^r syx^{s-1} + x^s ryx^{r-1}, \\ x^r \left(\frac{s(s-1)}{2} x^{s-2} y^2 + sx^{s-1} z\right) + ryx^{r-1} syx^{s-1} + x^s \left(\frac{r(r-1)}{2} x^{r-2} y^2 + rx^{r-1} z\right) \end{array} \right)$$

        Il n'y a qu'une ligne dans la parenthèse .
        Le coefficient le plus délicat est celui de $x^{r+s-2} y^2$:

        $$\frac{s(s-1)}{2} + rs + \frac{r(r-1)}{2} = \frac{s^2 - s + 2rs + r^2 - r}{2} = \frac{(r+s)^2 - (r+s)}{2} = \frac{(r+s)(r+s-1)}{2}$$

        On trouve bien C^{r+s} .
      - $(CC')^r = C^r C'^r$ se vérifie de la même façon
      - $(C^r)^s = C^{rs}$ se fait aussi en rédigeant le calcul .
      - *Remarque : Que mettre dans une copie :*
        - *Si vous arrivez ici à la fin du devoir et que vous pensez avoir tout à peu près bien traiter vous pouvez aller vite . Comme pour le premier calcul ci dessus donnez la règle de calcul , insistez sur le détail de l'étape principale (pour bien montrer que vous avez compris le calcul) et concluez.*
        - *Si vous arrivez ici pour grappiller quelques fractions de points après un devoir que vous pensez être raté il faut montrer clairement que vous savez* ***rédiger*** *un calcul . Comme la réponse est donnée l'examinateur est convaincu que vous êtes capable de trouver le résultat ... mais comment... that is the question .*