Centrale MP 2003
Math 1

Partie I

I.A. Soit $g(t) = e^{-t}\cos(t) + ie^{-t}\sin(t) = e^{-t}e^{it}$. La fonction g est continue sur $[x, +\infty[$ et $\lim_{+\infty}\left(t^2\,|g(t)|\right) = \lim_{+\infty}\left(t^2e^{-t}\right) = 0$. Donc g est intégrable sur $[x, +\infty[$, donc aussi ses parties réelles et imaginaires.
Une primitive de $t -> e^{(-1+i)t}$ étant $t -> \frac{1}{-1+i}e^{(-1+i)t}$ de limite nulle en $+\infty$ (car $\left|\frac{1}{-1+i}e^{(-1+i)t}\right| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2}}$) on a

$$\int_x^{+\infty} g(t)dt = \frac{1+i}{2}e^{(-1+i)t} = \frac{e^{-x}}{2}(1+i)(\cos(x)+i\sin(x)) = \frac{e^{-x}}{2}((\cos(x)-\sin(x))+i(\cos(x)+\sin(x)))$$

il en résulte par séparation des parties réelles et imaginaires, que :

$$\boxed{e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t dt = \tfrac{1}{2}(\cos(x)-\sin(x)) \quad \text{et} \quad e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}\sin t dt = \tfrac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))}$$

I.B. La solution générale de $y' - y = 0$ est $y = \lambda e^x$.
On utilise alors la méthode de variation de la constante : $\lambda(x)e^x$ est solution de $y' - y = -\cos(x)$ si et seulement si $\lambda'(x)e^x = -\cos(x)$. Donc $\lambda(x) = K + \int_{x_0}^x -e^{-t}\cos(t)\,dt$ .K étant une constante.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \cos x = 0$ sont donc $\left(K + \int_{x_0}^x -e^{-t}\cos(t)\,dt\right)e^x$.
On cherche une solution Y_0 bornée . Or $\lim_{x->+\infty}(e^x) = +\infty$. pour avoir une solution bornée il faut donc

$$\lim_{+\infty}\left(K + \int_{x_0}^x -e^{-t}\cos(t)\,dt\right) = 0$$

et donc $K = \int_{x_0}^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt$. soit $K + \int_{x_0}^x -e^{-t}\cos(t)\,dt = \int_x^{+\infty} e^{-t}\cos(t)dt$
On a alors $Y_0(x) = e^x\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}\cos t dt = \frac{1}{2}(\cos(x)-\sin(x))$, fonction clairement bornée sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La solution générale sur } \mathbb{R} \text{ de } y' - y + \cos x = 0 \text{ est donc } Y_\lambda = \lambda e^x + \tfrac{1}{2}(\cos x - \sin x).}$$

Remarquons que $Y_0(x)$ est la seule solution bornée sur $\mathbb{R}$.
De même la solution générale sur $\mathbb{R}$ de $y' - y + \sin x = 0$ est $\underline{\lambda e^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)}$.
I.C.1. D'après la première question ϕ est bien définie. Elle est en outre clairement linéaire et, toujours d'après la première question, les images des fonctions cos et sin appartiennent à Π:

$$\phi(\cos) = \frac{\cos - \sin}{2}$$
$$\phi(\sin) = \frac{\cos + \sin}{2}$$

ϕ définit bien un endomorphisme de Π.
D'après la première question, la matrice de ϕ dans la base $(\cos, \sin)$ est

$$\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

I.C.2. Si $f(x) = a\cos x + b\sin x$ on sait que $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$ de sorte que $||f||_\infty = \sqrt{a^2+b^2}$.
Alors $f_1(x) = \frac{a+b}{2}\cos x + \frac{b-a}{2}\sin x$ de sorte que $||f_1||_\infty = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}||f||_\infty$.

$$||f_1||_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}||f||_\infty$$

Il en résulte que $||f_n||_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}^n}||f||_\infty$ et donc $\sup_{\mathbb{R}}(|f_n - 0|) -> 0$
Ainsi, pour toute fonction $f \in \Pi$, $\underline{\text{la suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction nulle.}}$

Partie II

II.A. $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt$ converge car $t -> \frac{e^{-t}}{t}$ est continue positive sur $[x, +\infty[$ (car $x > 0$) et $\lim_{+\infty}\left(t^2\frac{e^{-t}}{t}\right) = 0$.

Si on reprend la méthode de la variation de la constante de la même manière exactement qu'en I.B.,on trouve que la solution générale sur $]0,+\infty[$ de $y'-y+\frac{1}{x}=0$ est :

$$Y_\lambda(x)=e^x\left(K+\int_{x_0}^{x}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)$$

et toujours comme au I. : si il existe une solution bornée sur $[a,+\infty[$ c'est $Y_0(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

Reste à vérifier que cette fonction est bornée:

$$\begin{aligned} Y_0(x) &\leq e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x}dt \text{ car t} \geq x \\ &\leq e^x\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

On a donc $Y_0\leq\frac{1}{a}$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$ inclus dans $]0,+\infty[$ .et Y_0 est bornée "quand x tend vers $+\infty$"

$$\boxed{Y_\lambda(x)=\lambda e^x+e^x\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}$$

De l'expression de la solution générale, il en découle que Y_0 est la seule solution bornée "quand x tend vers $+\infty$."

- On a, au voisinage de 0^+, $\frac{e^{-t}}{t}\sim\frac{1}{t}$ avec $\frac{1}{t}$ continue, positive , non intégrable sur $],1]$. Donc par équivalent $\frac{e^{-t}}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,1]$ et donc $\lim_{0^+}\left(\int_x^1\frac{e^{-t}}{t}dt\right)=0$, et donc en ajoutant la constante $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$

$$\boxed{\lim_{x->0^+}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt=+\infty}$$

- De l'expression de la solution générale, il en découle que $\underline{\lim_{x->0^+}Y_\lambda(x)=+\infty}$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$.

II.B.1 D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour une éqution différentielle linéaire résolue du premier ordre , on dispose bien de l'existence et de l'unicité de la solution Y_m telle que $Y_m(x_m)=y_m$ pour tout point $M(x_m,y_m)$ du demi-plan $x>0$.
On a d'après l'équation : $Y_m(x_m)-Y'_m(x_m)+\frac{1}{x_m}=0$ donc $\underline{Y'_m(x_m)=0 \text{ si et seulement si } y_m=\frac{1}{x_m}}$.
Donc $\mathcal{H}$ est inclus dans la branche d'hyperbole $y=\frac{1}{x}$ avec $x>0$. C'est l'ensemble des points des courbes intégrales à tangente horizontale.
Réciproquement si (X,Y) est un point de cette demi hyperbole , il existe une solution y_λ de l'équation différentielle passant par ce point (Cauchy Lipschitz) et en ce point $y'_\lambda(X)=0$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{H} \text{ est la branche d'hyperbole } y=\frac{1}{x} \text{ avec } x>0}$$

La fonction $x->\frac{1}{x}$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ il en résulte que toute solution est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ainsi on a le droit de dériver l'équation E_f et donc $Y''_m(x_m)-Y'_m(x_m)-\frac{1}{x_m^2}=0$ donc $Y''_m(x_m)=0$ si et seulement si $Y'_m(x_m)+\frac{1}{x_m^2}=0$ soit si et seulement si $Y_m(x_m)-\frac{1}{x_m}+\frac{1}{x_m^2}=0$.
Donc $\mathcal{T}$ est inclus dans la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ pour $x>0$. l'autre inclusion découle aussi de Cauchy Lipschitz.

$$\boxed{\mathcal{T} \text{ est la courbe d'équation } y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \text{ pour } x>0}$$

Si la dérivée seconde $Y"_\lambda$ change de signe en un point de $\mathcal{T}$ on un point d'inflexion au graphe $\mathcal{C}_\lambda$.
On peut remarquer que en un tel point $Y'_m(x_m)=-\frac{1}{x_m^2}<0$.
II.B.2 par intégration par parties, on a $\int_x^X\frac{e^{-t}}{t}dt=\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-X}}{X}-\int_x^X\frac{e^{-t}}{t^2}dt$.
On sait déja que $t->\frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[x,+\infty[$. On a aussi $t->\frac{e^{-t}}{t^2}$, continue,positive ngligeable devant $1/t^2$, donc intégrable sur $[x,+\infty[$. Enfin $\lim_{X->+\infty}\left(\frac{e^{-X}}{X}\right)=0$. Donc par passage à la limite $Y_0(x)=\frac{1}{x}-e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^2}dt$

Par une seconde intégration par parties on a : $Y_0(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{2e^{-t}}{t^3}dt$ donc

$$\boxed{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\leq Y_0(x)\leq\frac{1}{x}}$$

.

<u>Ainsi la courbe intégrale $\mathcal{C}_0$ est strictement comprise entre les courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$.</u>
II.B.3 voir graphe en annexe

- Le graphe $\mathcal{H}$ est évident.
- Pour $\mathcal{T}$ on pose $T(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $\frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$ négative si $x \geq 2$, positive si $x \leq 2$. et on a $T(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x} -> 0$, $T(x) \sim_{0^+} \frac{-1}{x^2} -> -\infty$, $T(1) = 0$.
- Comme $Y_0(x) < \frac{1}{x}$ on a $Y_0'(x) = Y_0(x) - \frac{1}{x} < 0$ (pensez à E_f) et donc Y_0 est toujours décroissante. D'où l'allure de $\mathcal{C}_0$.
- $Y_{\lambda_1}(x) > Y_0(x)$,

  $Y_{\lambda_1}(x)$ tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$, De plus en $+\infty$ $Y_{\lambda_1}(x) \sim \lambda_1 e^x$ d'où une branche parabolique verticale

  $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ coupe $\mathcal{H}$ en un point au plus sinon, par le théorème de Rolle, Y''_{λ_1} s'annulerait ce qui est impossible car $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_0$ elle-même strictement au dessus de $\mathcal{T}$. De plus en $+\infty$ $Y_{\lambda_1}(x) \sim \lambda_1 e^x$ d'où une branche parabolique verticale. D'ou l'allure de $\mathcal{C}_{\lambda_1}$.

  $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ coupe $\mathcal{H}$ sinon Y_{λ_1} serait strictement monotone sur $]0, +\infty[$, ce qui est incompatible avec les limites en 0 et $+\infty$.
- $Y_{\lambda_2}(x) < Y_0(x)$ donc $\mathcal{C}_{\lambda_2}$ est toujours en dessous de $\mathcal{C}_0$ donc a fortiori de $\mathcal{H}$ et donc la dérivée est toujours négative.

  $Y_{\lambda_2}(x)$ tend vers $+\infty$ en 0^+ et vers $-\infty$ en $+\infty$, De plus en $+\infty$ $Y_{\lambda_1}(x) \sim \lambda_1 e^x$ d'où une branche parabolique verticale

  $\mathcal{C}_{\lambda_2}$ coupe $\mathcal{T}$ en son point d'inflexion En effet $Y_{\lambda_2} - T$ tend vers $+\infty$ en 0 et vers $-\infty$ en $+\infty$. La fonction $Y_{\lambda_2} - T$ est continue sur $]0, +\infty[$ et change de signe sur cet intervalle, donc y admet une racine.

Partie III

III.A. $\mathcal{E}$ est non vide (contient la fonction nulle) et est stable par combinaison linéaire en effet :
Soient $(f_1, f_2) \in \mathcal{E}^{\ 2}$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ on doit montrer que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in \mathcal{E}$.Par hypothèse:

$$\begin{gathered} \exists \alpha_1 \in \mathbb{R} \ , \ \lim_{+\infty} \left(\frac{f_1(x)}{x^{\alpha_1}} \right) = 0 \\ \exists \alpha_2 \in \mathbb{R} \ , \ \lim_{+\infty} \left(\frac{f_1(x)}{x^{\alpha_2}} \right) = 0 \end{gathered}$$

On pose alors $\alpha > \max(\alpha_1, \alpha_2)$ et

$$\frac{\lambda_1 f_1 x) + \lambda_2 f_2(x)}{x^\alpha} = \frac{\lambda_1}{x^{\alpha-\alpha_1}} \frac{f_1(x)}{x^{\alpha_1}} + \frac{\lambda_2}{x^{\alpha-\alpha_2}} \frac{f_2(x)}{x^{\alpha_2}} \rightarrow_{x->+\infty} 0.0 + 0.0 = 0$$

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est un sous-espace de } \mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})}$$

III.A.bis) comme $[x, +\infty[\subset [x_0, +\infty[$ les fonctions f et g sont intégrables sur $[x, +\infty[$ et donc F et G sont définies.
Pour montrer la négligeabilité on revient aux quantificateurs:

$$f << g \Rightarrow \Big(\ \forall \varepsilon > 0, \exists X, x \geq X \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon g(x) \Big)$$

Si on intègre l'inégalité sur $[x, +\infty[$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X, x \geq X \Rightarrow |F(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| \, dt \leq \int_x^{+\infty} \varepsilon g(t) dt \leq \varepsilon G(x)$$

soit

$$\boxed{f <<_{+\infty} g \Rightarrow F <<_{+\infty} G}$$

III.A.ter On a

$$t^\alpha e^{-t} \leq 2(t^\alpha e^{-t} - \alpha t^{\alpha-1} e^{-t}) \Leftrightarrow t^\alpha e^{-t} \geq 2\alpha t^{\alpha-1} e^{-t} \Leftrightarrow t \geq 2\alpha \text{ car } t^{\alpha-1} e^{-t} > 0$$

donc pour $\alpha > 0$ $\mathcal{S} = [2\alpha, +\infty[$ et pour $\alpha \leq 0$, $\mathcal{S} = \mathbb{R}^{+*}$
Donc pour $X = \sup(2\alpha, 1)$, $t \geq X \Rightarrow t^\alpha e^{-t} \leq 2(t^\alpha e^{-t} - \alpha t^{\alpha-1} e^{-t}) \Rightarrow t^\alpha e^{-t} \leq 2 \left(-t^\alpha e^{-t} \right)'$
Remarque : 1 ou n'importe quel réel strictement positif)
Si on intègre pour $x \geq X$ sur $[x, +\infty[$ (les deux fonctions étant continues , positives , négligeable devant t^2 en $+\infty$ on a :

$$\int_x^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \leq 2x^\alpha e^{-x} - \lim_{z->+\infty} \left(2z^\alpha e^{-z} \right) = 2x^\alpha e^{-x}$$

III.B. Pour $f \in \mathcal{E}$, $t- > e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ car la fonction est continue et

$$\lim_{+\infty} \left(t^2 \left| e^{-t} f(t) \right| \right) = \lim_{+\infty} \left(\left(t^{2+\alpha} e^{-t} \right) \left(\frac{f(t)}{t^\alpha} \right) \right) = 0$$

Il en résulte, de la même manière que précédemment par la méthode de la variation de la constante, que la solution générale sur I de l'équation E_f est $y(x) = e^x \left(K - \int_{x_0}^x e^{-t} f_1(t) \right)$.

$y \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \exists\alpha, \lim_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^\alpha}\left(K-\int_{x_0}^x e^{-t}f_1(t)\right)\right)=0$. Or $\lim_{+\infty}\left(\frac{e^x}{x^\alpha}\right)=+\infty$. Donc si α existe $\lim\left(K-\int_{x_0}^x e^{-t}f_1(t)\right)=0$ et donc $K=\int_{x_0}^{+\infty} e^{-t}f_1(t)$ et $\left(K-\int_{x_0}^x e^{-t}f_1(t)\right)=\int_x^{+\infty} e^{-t}f_1(t)dt$
Il existe au plus une solution dans $\mathcal{E}$: $f_1(x)=e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}f_1(t)dt$
Reste à vérifier que $f_1 \in \mathcal{E}$. Donc trouver β tel que $\lim_{+\infty}\left(\frac{f_1(x)}{x^\beta}\right)=0$
or $f \in \mathcal{E}$ donc $\exists\alpha$, $f << t^\alpha$

$$f(t) << t^\alpha \Rightarrow e^{-t}f(t) << e^{-t}t^\alpha$$

les deux fonctions sont continues intégrables sur $[x_0,+\infty[$ (pour $x_0 \in I$) , la seconde fonction étant positive donc d'après les questions III.A.bis et III.A.ter :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt << \int_x^{+\infty} e^{-t}t^\alpha dt \leq 2x^\alpha e^{-x}$$

donc $f_1(x) <<_{+\infty} x^\alpha$ et comme f_1 est continue $f_1 \in \mathcal{E}$.
III.C. on a $f_n=\phi(f_{n-1})$ donc $f_n'-f_n+f_{n-1}=0$ pour tout $n \geq 1$.
Désignons par K un segment quelconque de I.

- $(i) \Rightarrow (ii)$Supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur K vers une fonction notée F. Alors la suite (f_n') égale à la suite (f_n-f_{n-1}) converge uniformément sur K vers la fonction $F-F$ donc vers la fonction nulle.

  Le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions C^1 s'applique alors (CVS de la suite (f_n)et CVU de la suite (f_n')) ce qui prouve que la fonction F est dérivable sur K de dérivée la fonction nulle. Ce qui prouve que F est constante sur K puisque K est un intervalle.

- $(ii) \Rightarrow (i)$ est évident

- Remarque 5/2 : le sujet initialise "sur tout compact" me semble faux si K n'est pas un intervalle.

III.D. Les deux intégrales proposées existent :
- $t->\frac{(t-x)^n}{n!}f(t)e^{-t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ et $t^2\left|\frac{(t-x)^n}{n!}f(t)e^{-t}\right| \sim \frac{t^{n+2}}{n!}\left|f(t)\right|e^{-t} <<_{t->+\infty} t^{n+2+a}e^{-t}$ et donc $\lim_{t->+\infty} t^2 \left|(t-\right.$
0 .
- $u->\frac{u^n}{n!}f(x+u)e^{-u}$ est continue sur $[0,+\infty[$ (car $x+u \in I$) et $|f(x+u)| <<_{u->+\infty} (x+u)^a \sim_{u->+\infty} x^a$ et donc $\lim\left(u^2\frac{u^n}{n!}f(x+u)e^{-u}\right)=0$
On raisonne alors par récurrence sur n pour montrer $f_{n+1}(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}f(t)e^{-t}dt$

- la formule proposée étant vraie pour $n=0$ par définition de ϕ:

$$f_1(x)=e^x\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^0}{n!}f(t)e^{-t}dt$$

- Supposons la formule vraie au rang n.

En notant que $f_{n+1}=\phi^n(f_1)$, il vient par hypothèse de récurrence que $f_{n+1}(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f_1(t)e^{-t}\ dt$. Intégrons par parties entre x et A en dérivant $f_1(t)e^{-t}=\displaystyle\int_t^{+\infty} e^{-u}f(u)\ du$ (de dérivée $-e^{-t}f(t)$) :

$$\int_x^A \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f_1(t)e^{-t}dt=\frac{(A-x)^n}{n!}f_1(A)e^{-A}+\int_x^A\frac{(t-x)^n}{n!}f(t)e^{-t}dt$$

Or il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_1(A) << A^\alpha$ lorsque $A \to +\infty$. Donc

$$\frac{(A-x)^n}{n!}f_1(A)e^{-A} \sim_{A->+\infty} \frac{A^n}{n!}f_1(A)e^{-A} <<_{A->+\infty} A^{n+\alpha}e^{-A} \text{ de limite nulle}$$

Il en découle que $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!}f_1(t)e^{-t}\ dt=\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}f(t)e^{-t}dt$ ce qui prouve que la formule est vraie au rang $n+1$.

- En conclusion $f_{n+1}(x)=e^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{(t-x)^n}{n!}f(t)e^{-t}dt$

- Or $\displaystyle\int_x^A\frac{(t-x)^n}{n!}f(t)e^{-(t-x)}dt=\int_0^{A-x}\frac{u^n}{n!}f(x+u)e^{-u}du$ par changement de variable $u=x-t$.

donc en passant à la limite (on a déjà prouver l'intégrabilité)

$$\boxed{f_{n+1}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{(t-x)^n}{n!} f(t)e^{-(t-x)}dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{n!} f(x+u)e^{-u}du}$$

III.E.Si $f \in \ker\phi$ alors $x -> \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)dt$ est la fonction nulle donc de dérivée nulle ce qui implique que f est la fonction nulle. Ainsi ϕ est injective de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

- Si $f_1 = \phi(f)$ alors f_1 vérifie l'équation différentielle $f_1' - f_1 + f = 0$ donc, $f_1' = f_1 - f \in \mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que f et f_1 sont dans $\mathcal{E}$. Ainsi $\mathrm{Im}(\phi)$ est inclus dans l'ensemble des applications g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que g et g' appartiennent à $\mathcal{E}$.
- Réciproquement soit g une application de cet espace. Si on pose $f = g - g'$, alors $f \in \mathcal{E}$ (car sous-espace vectoriel) et g vérifie l'équation $y' - y + f = 0$. Or g appartient à $\mathcal{E}$ donc $g = f_1 = \phi(f)$ d'après l'unicité de la question III.B.
- En conclusion ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur l'ensemble des applications g de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que g et g' appartiennent à $\mathcal{E}$ (de plus ϕ^{-1} est définie par $\phi^{-1}(g) = g - g'$).

Partie V.

V.A. Si f est périodique et continue sur $\mathbb{R}$ alors elle est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-t}f(t)t$ est intégrable sur $[x, +\infty[$ et donc par variation de la constante la solution générale sur $\mathbb{R}$ de E_f est toujours du type $y = \lambda e^x + f_1(x)$ avec $f_1(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t}f(t)t$.

- On a également (même changement de variable q'au III.D) $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}f(x+u)\ du$ ce qui prouve immédiatement que $f_1 \in \mathcal{P}$.

De l'expression de la solution générale, il en résulte que f_1 est l'unique solution de E_f appartenant à $\mathcal{P}$.

- $f_1$est une fonction périodique et de classe $\mathcal{C}^1$sur $\mathbb{R}$ a fortiori continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de sorte que sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers elle-même.

V.B. Comme $f_1$est de classe $\mathcal{C}^1$la relation entre coefficients de Fourier (qui se retrouve par intégration par partie) donne :

$$c_k(f_1') = ik.c_k(f_1)$$

Par ailleurs $f_1' - f_1 + f = 0$ de sorte que $c_k(f_1') - c_k(f_1) + c_k(f) = 0$.
Ainsi

$$\boxed{(-1+ik)c_k(f_1) + c_k(f) = 0}$$

V.C.

- $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{K}$ est évidemment réduit à la fonction nulle ce qui prouve que la somme est directe
- si $f \in \mathcal{P}$, on cherche une décomposition $f = p + k$, p périodique de valeur moyenne nulle et k constante. Le calcul de l'intégrale $\int_0^{2\pi} f$ donns alors $k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$ et donc $p(x) = f(x)-$ k.
- On vérifie alors que cette décomposition convient : f appartient bien à $\mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{K}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{K}}$.
- De la question V.B. résulte en particulier que si la valeur moyenne de f est nulle, il en va de même de celle de f_1 car $c_0(f_1) = c_0(f)$ Ainsi $\mathcal{P}_0$ est un sous-espace supplémentaires de stable par ϕ.
- si $f = k$ est une constante on a $f_1 = e^x \int_x^{+\infty} ke^{-t}dt = e^x(ke^{-x}) = k$ donc $\mathcal{K}$ est stable par ϕ .

Soit $f \in \mathcal{P}_0$
Pour $n \geq 1$, f est somme de sa série de Fourier d'après la question V.A. et sa valeur moyenne est nulle , donc $c_0(f) = 0$
Donc $g_n(x) = \sum_{k\in N^*} c_k(g_n)e^{ikx} + c_{-k}(g_n)e^{-ikx}$.

Par ailleurs $c_k(g_n) = \frac{1}{1-ik}c_k(g_{n-1})$ d'après la question V.B. et donc $c_k(g_n) = \left(\frac{1}{1-ik}\right)^{n-1} c_k(g_1)$ de sorte que $g_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{(1-ik)^{n-1}}c_k(g_1)e^{ikx} + \frac{1}{(1+ik)^{n-1}}c_{-k}(g_1)e^{-ikx}\right)$
Or, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $|1 \pm ik| \geq \sqrt{2}$ et, comme la série de Fourier de g_1 converge normalement, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} |c_k(g_1)| + |c_{-k}(g_1)|$ converge (on note S sa somme).
Il en résulte que $|g_n(x)| \leq \frac{S}{(\sqrt{2})^{n-1}}$ pour tout réel x ce qui prouve bien la convergence uniforme de la suite (g_n) vers la fonction nulle.

Soit $f \in \mathcal{P}$
f se décompose en $f = g + k$ avec $g \in \mathcal{P}_0$ et k la valeur moyenne de f. On a alors $\phi(f) = \phi(g) + \phi(k)$.
Or $\phi(k) = k$ (cf stabilité de $\mathcal{K}$) et donc $\phi(f) = \phi(g) + k$ et par récurrence $\phi^n(f) = \phi^n(g) + k$.
Comme $\phi^n(g)$ converge uniformément vers 0 ,

$$\boxed{\phi^n(f) \text{ converge uniformément vers } k \text{ sa valeur moyenne}}$$

En conclusion, pour $f \in \mathcal{P}$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la valeur moyenne de f.