CENTRALE PC 1997 Math 2

1. Préambule

A) C'est la formule de Pythagore:un triangle de cotés a et $a+1$ est rectangle d'hypoténuse c si et seulement si :

$$a+(a+1)^2=c^2$$

ce qui donne **R1** en développant.

B) Il est possible d'incrémenter a en testant le caractère entier de

$$\sqrt{2a^2+2a+1}$$

en supposant connu a_{n-1} la procédure suivant va incrémenter a de 1 en mémorisant dans la variable b les valeurs successives :

```
>f:=a->sqrt(2*a^2+2*a+1);
>suivant:=proc(a) local b;
> b:=a+1;
> while not(type(f(b),integer)) do b:=b+1;od;
> end
```

A la machine à calculer il faut remplacer le test `type(c,integer)`par un test du type:$E(c)=c$. Votre machine n'est, de toute façon, pas assez puissante pour ne pas être limitée assez vite par la taille des données. Avec 10 chiffres le calcul de `2*a^2+2*a+1` sera approché dès que $a>100000$ soit $(n\geq 7)$.Ce qui arrive assez vite. L'algorithme général (MAPLE ou non) doit penser à ce problème et être rédiger de façon à ne faire que du calcul exact.

C *Cette question est indispensable pour initialiser les récurrence qui suivent. Le candidat qui ne réussit pas à faire le calcul à la machine peut quand même s'en sortir car la réponse est au V.B) en développant* $\left(1+\sqrt{2}\right)^5$ *et* .$\left(1+\sqrt{2}\right)^7$

$$\boxed{\begin{cases} a_2=20, c_2=29 \\ a_3=119, c_3=169\end{cases}}$$

2. Les suites

A) pour $n=1$ et $n=2$ on a le système:$\begin{cases} 29+5\beta+\lambda=0 \\ 169+29\beta+5\lambda=0\end{cases}$.Le système est un système linéaire de déterminant -4.Il est de Cramer et admet une unique solution $\boxed{\beta=-6,\lambda=1}$

$$\boxed{c_{n+1}=6c_n-c_{n-1}}$$

Prenons l'hypothèse de récurrence pour $n\geq 1$ H_n:$v_n>v_{n-1}$ et $v_n\in\mathbb{N}$

- elle est vérifié pour $n=1:5>1$ et $5\in\mathbb{N}$.
- elle est vérifié pour $n=2:29>1$ et $5\in\mathbb{N}$
- si elle est vérifié pour $n-2$ et $n-1$ on a:
  - :$v_n=6v_{n-1}-v_{n-2}=5v_{n-1}+(v_{n-1}-v_{n-2})$ qui est d'après de récurrence la somme de deux éléments de $\mathbb{N}$.
  - $v_n-v_{n-1}=5v_{n-1}-v_{n-2}>4v_{n-2}>0$.en utilisant $v_{n-1}>v_{n-2}>0$.On a donc $v_n>v_{n-1}$
- enfin $v_0=1\in\mathbb{N}$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, v_n\in\mathbb{N}}$$

Remarque : la suite est définie par une récurrence double , la démonstratio doit se faire par récurrence double , ou forte (en initialisant 2 termes)

Pour le calcul on constate que l'on a une suite récurrente double à coefficients constants. On cherche l'équation caractéristique $r^2-6r+1=0$. En résolvant cette équation on trouve les racines p et q et donc: $\exists(a,b)\in\mathbb{C}^2,\forall n\in\mathbb{N}, v_n=ap^n+bq^n$. en prenant $n=0$ et $n=1$ on a le système:$\begin{cases} a+b=1 \\ (3+2\sqrt{2})a+(3-2\sqrt{2})b=0\end{cases}$ système linéaire de déterminant $-4\sqrt{2}$.Sa résolution donne

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\frac{(1+\sqrt{2})p^n-(1-\sqrt{2})q^n}{2\sqrt{2}}}$$

Remarque:le jour du concours il est presque impossible de finir une telle question avec un résultat faux:il suffit de vérifier pour $n=2$ et 3 *par exemple.*

Remarque : on peut arriver aussi à : $v_n=\frac{(2+\sqrt{2})p^n+(2-\sqrt{2})q^n}{4}$.

B) Le calcul pour $n=1$ donne $a_2-6a_1+a_0=2$.On vérifie cette valeur de b pour $n=2$.
comme au **II.A)** en partant de $u_{n+1}=6u_n-u_{n-1}+2$ on vérifie par récurrence $H_n : u_n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n-1} \geq 0$.
—On a $w_{n+1}=u_{n+1}+1/2=6(w_n-1/2)-(w_{n-1}-1/2)+1/2+2=6w_n-w_{n-1}$.
—On a une suite récurrente double du même type que celle de la question précédente avec $w_0=1/2, w_1=7/2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{(2+\sqrt{2})p^n-(2-\sqrt{2})q^n}{4\sqrt{2}}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(2+\sqrt{2})p^n-(2-\sqrt{2})q^n}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}$$

remarque:$n=2$ *et on vérifie.*
remarque : on a aussi : $u_n = \frac{(1+\sqrt{2})p^n+1-\sqrt{2})q^n}{4} - \frac{1}{2}$
C) on a donc en remarquant que $pq=1$

$$\begin{aligned}
u_n^2+(1+u_n)^2 &= (w_n-1/2)^2+(w_n+1/2)^2 = 2w_n^2+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{16}\left((2+\sqrt{2})p^n-(2-\sqrt{2})q^n\right)^2+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{16}\left(\left(6+4\sqrt{2}\right)p^{2n}+\left(6-4\sqrt{2}\right)q^{2n}-4\right)+\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{8}\left(\left(3+2\sqrt{2}\right)p^{2n}+\left(3-2\sqrt{2}\right)q^{2n}\right)+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v_n^2 &= \frac{1}{8}\left((1+\sqrt{2})p^n-(1-\sqrt{2})q^n\right)^2\\
& \frac{1}{8}\left(\left(3+2\sqrt{2}\right)p^{2n}+\left(3-2\sqrt{2}\right)q^{2n}+2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{(u_n, v_n) \text{ est un TRPI}}$$

remarque:
Si le calcul n'aboutit pas c'est peut-être u_n *ou* v_n *qui est faux : Il est alors urgent de vérifier pour* $n=0,1,2$ *les valeurs trouvées.*
une faute à ne pas faire:dire $a_n=u_n, c_n=v_n$ *on ne sait pas encore si on a obtenu toutes les solutions.*

3. L'algèbre linéaire

le sujet dit : ***retrouver*** *.... il est donc interdit d'utiliser dans le cours de la question les valeurs calculées au II.Il faut impérativement repartir des relations de récurrence définissant les suites.*
A1 Vérifions par récurrence sur n :$\begin{cases} u_{n+1}=3u_n+2v_n+1 \\ v_{n+1}=4u_n+3v_n+2 \end{cases}$
pour $n=0$ on a $\begin{cases} 3=0+2+1 \\ 5=0+3+3 \end{cases}$ et pour $n=1$on a $\begin{cases} 20=9+10+1 \\ 29=12+15+2 \end{cases}$ .La relation est vérifiée.
Supposons la propriété vraie pour tout $p<n$.
On aura:

$$u_{n+1}=6u_n-u_{n-1}+2=6(3u_{n-1}+2v_{n-1}+1)-((3u_{n-2}+2v_{n-2}+1)+2$$

$$u_n=3(6u_{n-1}-u_{n-2}+2)+2(6v_{n-1}-v_{n-2})+1=3u_n+2v_n+1$$

On utilise la définition de u_n, l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$ et $n-2$ et de nouveau les définitions de u_n et v_n.
Le calcul de v_n est similaire.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1}=3u_n+2v_n+1 \\ v_{n+1}=4u_n+3v_n+2 \end{cases}}$$

A2 la traduction matricielle du système précédent donne:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B1 $(A-I)=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ est de déterminant (-4) non nul. Un pivot de Gauss donne l'inverse:

$$(A-I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

B2 Comme A et I commute on peut utiliser l'identité remarquable $x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$:

$$(A-I)S_n = (A^n - I)$$

Soit :

$$\boxed{S_n = (A-I)^{-1}(A^n - I)}$$

B.3) Les premiers termes laissent penser que pour $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0 + S_n B$.Cette formule se vérifie alors par récurrence:

—pour $n = 1$: $X_1 = AX_0 + B$.

—si la propriété est vraie pour tout $p < n$ on a:$X_n = AX_{n-1} + B = A(A^{n-1}X_0 + S_{n-1}B) = A^n X_0 + (AS_{n-1} + I)B = A^n X_0 + S_n B$.

$$\begin{aligned} \forall n &\in \mathbb{N}^*, X_n = A^n X_0 + (A-I)^{-1}(A^n - I)B \\ &= A^n \left(X_0 + (A-I)^{-1}B\right) - (A-I)B \end{aligned}$$

en remarquant que comme A et $A-I$ commutent, A et $(A-I)^{-1}$ commentent.

$$\boxed{X_n = A^n \left(X_0 + (A-I)^{-1}B\right) - (A-I)B}$$

*remarque : la question **C** a été réécrite pour tenir compte de l'avancement du cours. Le sujet de Centrale diagonalise A pour calculer A^n .*

C1) On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$

et le système $A^2 = uA + vI$ donne sans problème $A^2 = 6A - I$

C2) on retrouve l'équation $x^2 - 6x + 1 = 0$ de racines p et q.

Par division euclidienne on peut écrire $X^n = PQ_n + R_n$ avec $d^\circ(R_n) \leq 1$. On peut alors poser $X^n = PQ_n + (aX + b)$ et utiliser les racines pour avoir a et b en résolvant le système : $\begin{cases} p^n = ap + b \\ q^n = aq + b \end{cases}$

on peut aussi utiliser l'interpolation de Lagrange . Si $L_p = \frac{X-q}{p-q}$ et $L_q = \frac{X-p}{q-p}$, $R_n = R(p)L_p + R(q)L_q = p^n L_p + q^n L_q$

$$\boxed{R_n = \frac{p^n - q^n}{p-q}X + \frac{pq^n - qp^n}{p-q}}$$

remarque : vérification pour $n = 0, n = 1$

C3) On en déduit successivement comme $p - q = 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} A^n &= R_n(A) = \frac{p^n - q^n}{p-q}A + \frac{pq^n - qp^n}{p-q}I \\ &= \frac{1}{p-q}\begin{pmatrix} \left(2\sqrt{2}\right)(p^n + q^n) & 2(p^n - q^n) \\ 4(p^n - q^n) & \left(2\sqrt{2}\right)(p^n + q^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X_0 + (A-I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{p-q}\begin{pmatrix} \left(2\sqrt{2}\right)(p^n + q^n) & 2(p^n - q^n) \\ 4(p^n - q^n) & \left(2\sqrt{2}\right)(p^n + q^n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(2\sqrt{2}+4)p^n + \left(2\sqrt{2}-4\right)q^n}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \\ \frac{(4\sqrt{2}+4)p^n + \left(4\sqrt{2}-4\right)q^n}{8\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$u_n = \frac{(\sqrt{2}+2)p^n + \left(\sqrt{2}-2\right)q^n}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}$$

$$v_n = \frac{(\sqrt{2}+1)p^n + \left(\sqrt{2}-1\right)q^n}{2\sqrt{2}}$$

remarque:A comparer à :

$$u_n = \frac{(2+\sqrt{2})p^n - (2-\sqrt{2})q^n}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{2}, v_n = \frac{(1+\sqrt{2})p^n - (1-\sqrt{2})q^n}{2\sqrt{2}}$$

4. Un peu de géomètrie

A Les couples (a_n, c_n)qui définissent un TRPI sont des couples d'éléments de $\mathbb{N}$ par hypothèse et vérifient bien l'équation $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$ d'après le IA. On a bien une équation de conique (éventuellement dégénérée) puisque l'équation est polynômiale de degré total 2 en x, y. D'autre part l'ensemble est non vide puisqu'on connaît déjà une infinité de TRPI.

B Pour réduire l'équation de la conique on écrit que son équation est équivalente à :

$$y^2 = 2(x - 1/2)^2 + 1/2$$

donc en posant $Y = y$ et $X = x + 1/2$ ce qui revient à faire une translation de $-1/2\overrightarrow{i}$ du repère initial:

$$\left(\frac{Y}{\sqrt{2}/2}\right)^2 - \left(\frac{X}{1/2}\right)^2 = 1$$

C'est une hyperbole de centre $(x = -1/2, y = 0)$ et d'asymptotes $Y = \pm\sqrt{2}X$.
figure à la fin.

C φ est une application affine de déterminant 1 non nul . Le système $\phi(M) = M'$ est donc toujours de Cramer . Tout point M' du plan admet un unique antécédent, ϕ est bijective. .Si on résout (par Pivot de Gauss ou par déterminant) le système $\left\{\begin{smallmatrix} x'=3x+2y+1 \\ y'=4x+3y+2 \end{smallmatrix}\right.$on trouve :$\boxed{\left\{\begin{smallmatrix} x=3x'-2y'+1 \\ y=-4x'+3y'-2 \end{smallmatrix}\right.}$.Ce qui donne donc la fonction réciproque de ϕ sur $\mathbb{R}^2$.

D Soit $(x, y) \in \mathcal{P}$ si on calcule $(2x'^2 + 2x' + 1) - y'^2$ on a:
$(2x'^2 + 2x' + 1) - y'^2 = 2(3x + 2y + 1)^2 + 2(3x + 2y + 1) + 1 - (4x + 3y + 2)^2 =$
$(18x^2 + 8y^2 + 24xy + 12x + 4y + 1) + (6x + 4y + 2) + 1 - (16x^2 + 9y^2 + 24xy + 16x + 12y + 4) =$
$2x^2 - y^2 + 2x + 1$
On a donc $(2x'^2 + 2x' + 1) - y'^2 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 + 2x + 1) - y^2 = 0$. Et donc $M \in C \Leftrightarrow M' \in C$
En prouvant l'égalité pour tout point du plan on évite la double inclusion.
D'après le calcul précédent pour montrer $\varphi(C_1) \subset C_1$ il suffit de montrer

$$(y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \text{ et } y \geq 0) \Rightarrow (y' \geq 0)$$

.Or $y^2 = 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = -1/2(1 \pm \sqrt{2y^2 - 1})$ car sur C_1 $y \geq \sqrt{2}/2$. Donc $y' = 4x + 3y + 2 = 3y \pm 2\sqrt{2y^2 - 1}$.$3y + 2\sqrt{2y^2 - 1}$ est bien positive mais aussi $3y - 2\sqrt{2y^2 - 1}$car $9y^2 \geq 8y^2 - 4$ et $3y \geq 0$
L'autre inclusion est symétrique le calcul de y en fonction de y' donnant aussi:$y = 3y' \pm 2\sqrt{2y'^2 - 1}$.

$$\boxed{\varphi(C_1) = C_1}$$

Remarque : on peut aussi utiliser le paramétrage d'une demi hyperbole $\left(t \in \mathbb{R}^+, \left\{\begin{array}{c} X = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(t) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}(t) \end{array}\right.\right)$, *soit* $\left(t \in \mathbb{R}^+, \left\{\begin{array}{c} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(t) - \frac{1}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}(t) \end{array}\right.\right)$ et on a alors $y' = 2\operatorname{sh}(t) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}(t) > 0$ et $y = -2\operatorname{sh}(t') + \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{ch}(t') \geq 0$ *car* $\frac{3\sqrt{2}}{2} \geq 2 \geq 0$ *et* $\operatorname{ch}(t) \geq \operatorname{sh}(t) \geq 0$

E C'est une conséquence directe de $(u_n, v_n) \in C$ et $v_n \geq 0$.

F,G Sur C_1 y est positif et donc $y = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ et donc $x' = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1$.
On étudie alors la fonction $g(x) = 3x + 2\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + 1$ qui est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$ la quantité sous le radical étant strictement positive. De plus:

$$g'(x) = 3 + \frac{4x + 2}{\sqrt{2x^2 + 2x + 1}}$$

g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et donc g est bijective de $[u_n, u_{n+1}]$ sur $[g(u_n), g(u_{n+1})]$
Or $g(u_n) = 3u_n + 2\sqrt{2u_n^2 + 2u_n + 1} + 1 = 3u_n + 2v_n + 1$ (car on a un TPRI) $= u_{n+1}$ (d'après la formule matriciel du **III**)
Donc $[g(u_n), g(u_{n+1})] = [u_{n+1}, u_{n+2}]$. L'abscisse de M' est entre u_{n+1} et u_{n+2} donc $M' \in [M_{n+1}, M_{n+2}]$

$$\boxed{\varphi \text{ est bijective de } [M_n, M_{n+1}] \text{ sur } [M_{n+1}, M_{n+2}]}$$

H Soit (a, c) un TRPI. On peut voir que $|q| < |p|$ et $1 < |p|$ donc $u_n \sim \frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}p^n \to +\infty$;de plus $u_0 = 0$.Il existe donc un indice n tel que $u_n \leq a < u_{n+1}$.Le point (a, c) est donc sur $[M_n, M_{n+1}]$, $\varphi^{-n}(a, c) \in [M_0, M_1]$.
Or l'image par φ^{-1} d'un couple d'entiers est un couple d'entiers.Donc $\varphi^{-n}(a, c) = (\alpha, \beta)$ est un TRPI avec $\alpha \in [[0, 3]]$ .Le programme du I a vérifié que 0 et 3 étaient les seules solutions. Donc $(\alpha, \beta) = M_0$ ou M_1.Donc $(a, b) = M_n$ ou M_{n+1} le second point étant exclu car $a < u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{Tout TRPI est un couple } (u_n, v_n)}$$

5. Et l'outil arithmétique

A calcul évident à partir de **R1**

B Si on pose $\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}=x_n+y_n\sqrt{2}$ on a en développant:

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}2^k \qquad , \qquad y_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^k$$

En développant de même on vérifie :$\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}=x_n-y_n\sqrt{2}$.et donc comme $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)=-1$, $\left(x_n+y_n\sqrt{2}\right)\left(x_n-y_n\sqrt{2}\right)=-1$ et donc $x_n^2-2y_n^2=-1$.

$$\boxed{(x_n-1)/2, y_n \text{ est un TRPI}}$$

Réciproquement on peut exprimer x_n et y_n en fonction de $\left(1\pm\sqrt{2}\right)$ et vérifier le lien avec les formules trouvées au **II** ou au **III**

$$\begin{cases}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}=x_n+y_n\sqrt{2}\\ \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}=x_n-y_n\sqrt{2}\end{cases}$$

On obtient par résolution de ce système:

$$\begin{cases}x_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}}{2}\\ y_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+1}-\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+1}}{2\sqrt{2}}\end{cases}$$

Or $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}=p$ et $\left(1-\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{2}=q$ donc

$$\begin{cases}x_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)p^n+\left(1-\sqrt{2}\right)q^n}{2}=2u_n+1=2a_n+1\\ y_n=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)p^n-\left(1-\sqrt{2}\right)q^n}{2\sqrt{2}}=v_n=c_n\end{cases}$$