ESSEC 2001
option scientifique
Math 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On étudie dans ce problème la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par:

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire } S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}.$$

Dans la partie I, on détermine la limite S de la suite (S_n). Dans les parties II et III, on explicite deux méthodes indépendantes permettant d'accélérer la convergence de (S_n) vers S.

PARTIE I

On considère pour tout nombre entier $p \geq 0$ les deux intégrales suivantes:

$$I_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t \, dt, \qquad J_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2p} t \, dt.$$

1. Convergence de la suite $\dfrac{J_p}{I_p}$.

a) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$:

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin t.$$

b) Établir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $p \geq 0$:

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

c) Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p en intégrant par parties l'intégrale I_{p+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = \cos^{2p+1} t$ dans l'intégration par parties).

d)Déduire des résultats précédents que $\dfrac{J_p}{I_p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

2. Convergence et limite de la suite (S_n).

a) Exprimer I_p en fonction de J_p et J_{p-1}, en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_p $(p \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $p \geq 1$:

$$\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}.$$

c) alculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

PARTIE II

On accélère ici la convergence de la suite (S_n) vers sa limite S par une méthode due à Stirling.
On désigne par:

- E l'espace vectoriel des fonctions continues de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$.
- f_k la fonction de E définie pour tout nombre entier naturel k par:

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+k)} \text{ pour } k \geq 1.$$

- Δ l'application associant à toute fonction f de E la fonction Δf définie pour $x > 0$ par:

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

1. Sommation de séries télescopiques

a) Établir que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Établir pour toute fonction f appartenant à E la convergence de la série $\sum(\Delta f)(p)$ avec $p \geq 1$ et calculer pour tout nombre entier naturel n les sommes suivantes:

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p), \qquad \sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p).$$

c) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geq 1$.

d) Établir pour tout nombre entier naturel $k \geq 1$ la convergence de la série $\sum f_k(p)$ et vérifier, pour tout nombre entier naturel n, que:

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k}\frac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)}.$$

2. Accélération de la convergence de (S_n)

a) Établir la relation suivante pour $p \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}(k-1)!f_k(p) = \frac{q!}{p}f_q(p).$$

b) En déduire l'inégalité suivante pour $n \geq 1$ et $q \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)} \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

c) En déduire, l'entier $q \geq 1$ étant fixé, une suite (S'_n) de nombres rationnels telle que:

$$0 \leq \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leq \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}.$$

Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.