Après une première partie consacrée à l'étude de la projection sur les convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ on établira (dans $\mathbb{R}^2$) le théorème du point fixe de Brouwer et quelques unes de ses conséquences.

On suppose que $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique et de la norme associée, notés $(\ |\ )$ et $\|\ \|$, donc si $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^n$ on a : $(x|y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\|=(x|x)^{1/2}$. Si X est une partie de $\mathbb{R}^n$ on notera $\overset{\circ}{X}$ son intérieur, soit $f:X\to\mathbb{R}^n$ on dira que $u\in X$ est un point fixe de f si $f(u)=u$; si $i\in\{1,\dots,n\}, f_i$ désigne la composante de rang i de f, donc : $f(x)=(f_1(x),\dots,f_i(x),\dots,f_n(x))$.

I. Projection sur un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$

1. Démontrer que si $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$, on a : $|(x|y)|\le\|x\|\,\|y\|$ (inégalité de Schwarz). Montrer que $|(x|y)|=\|x\|\,\|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires. Montrer que si $\{a,b,c\}\subset\mathbb{R}^n$ vérifie : $b\ne c$ et $\|a-b\|=\|a-c\|$, on a alors : $\left\|a-\frac{b+c}{2}\right\|<\|a-b\|$.

2. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, soit $x\in\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe $u\in F$ tel que : $\|x-u\|\le\|x-y\|$ pour tout $y\in F$ (on supposera d'abord que F est borné avant d'étudier le cas général).

3. Soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, montrer, en utilisant les questions précédentes, que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, il existe un unique $u\in A$ tel que $\|x-u\|\le\|x-y\|$ pour tout $y\in A$.

   Ceci établit le théorème de la projection sur les convexes de $\mathbb{R}^n$: soit A un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$, il existe une unique application, notée P, de $\mathbb{R}^n$ dans A qui vérifie : $\|x-P(x)\|=\min\{\|x-y\|: y\in A\}$, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$. $P(x)$ s'appelle la projection de x sur A.

4. Montrer que s'il existe $\alpha\in A$ tel que : $(x-\alpha|y-\alpha)\le 0$ pour tout $y\in A$, on a : $\alpha=P(x)$

5. Supposons qu'il existe $y\in A$ tel que : $(x-P(x)|y-P(x))>0$. Soit alors $\mathcal{S}:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par : $\mathcal{S}(t)=\|(x-P(x))-t(y-P(x))\|^2$. Montrer qu'il existe $t\in]0,1[$ tel que : $\mathcal{S}(t)<\|x-P(x)\|^2$.

6. Déduire de **4.** et **5.** que $u=P(x)$ si et seulement si : $u\in A$ et $(x-u|y-u)\le 0$ pour tout $y\in A$.

7. Soit $\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n$ montrer que : $(x-y|P(x)-P(y))\ge\|P(x)-P(y)\|^2$. En déduire que P vérifie les propriétés suivantes : P est continue, $P(\mathbb{R}^n)=A$, $P(x)=x$ si $x\in A$.

La question 8 n'est pas à traiter

II. Théorème de Brouwer dans $\mathbb{R}^2$

Pour toute la suite du problème, on se place dans $\mathbb{R}^2$; si $r>0$, $\overline{B}(O,r)$ désigne le disque fermé de centre O et de rayon r et $S(O,r)$ le cercle correspondant, on note $B=\overline{B}(O,1)$ et $S=S(O,1)$. On entend par application dérivable (ou C^1 ou C^2) de B (ou de $B\times\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}$), la restriction à B (ou à $B\times\mathbb{R}$) d'une application dérivable (ou C^1 ou C^2) définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$), contenant B (ou $B\times\mathbb{R}$), à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}$).

A. Cas particulier d'une application de classe C^2

Soit $f:B\to\mathbb{R}^2$, on suppose que f est de classe C^2 et que $f(B)\subset B$ et on se propose de montrer que f possède au moins un point fixe. On va raisonner par l'absurde et supposer que : $f(x)\neq x$ pour tout $x\in B$.

9. Montrer qu'il existe $\rho:B\to\mathbb{R}_+$, unique, telle que : $x+\rho(x)(x-f(x))\in S$ pour tout $x\in B$. Expliciter ρ, montrer qu'elle est de classe C^2 et que $\rho(x)=0$ si et seulement si $x\in S$. On pose : $\alpha(x)=\rho(x)(x-f(x))$ et $\alpha_{ij}(x)=\dfrac{\partial\alpha_j}{\partial x_i}(x)$ pour tout $(i,j)\in\{1,2\}^2$ et $\varphi(x)=x+\alpha(x)$.

On note $A(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{11}(x) & \alpha_{21}(x)\\ \alpha_{12}(x) & \alpha_{22}(x)\end{pmatrix}$ et $\varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix}$

10. Montrer que, pour tout $x\in B$, la matrice $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}(x)\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}(x)\end{pmatrix}$ est non inversible

Indication : Montrer puis dériver la relation $\varphi_1^2+\varphi_2^2=1$

11. Soit $\psi:B\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $\psi(x,t)=\det(I_2+tA(x))$

a) Montrer que : $\psi(x,t)=1+t\beta(x)+t^2\gamma(x)$ où β et γ sont des applications continues de B dans $\mathbb{R}$ que l'on explicitera à l'aide des applications $(\alpha_{ij})_{(i,j)\in\{1,2\}^2}$. Vérifier que $\psi(x,1)=0$ pour tout $x\in B$.

b) Soit $J:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par : $J(t)=\iint_B\psi(x,t)dx_1dx_2$. Justifier l'existence de J et calculer $J(0)$ et $J(1)$.

c) Montrer, grâce au théorème de Fubini que $\iint_B\beta(x)dx_1dx_2=0$.

d) Soit $g:B\to\mathbb{R}^2$ de classe C^2,

soient $I_1(g)=\iint_B\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(x)\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}(x)dx_1dx_2$, $I_2(g)=\iint_B\dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}(x)\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}(x)dx_1dx_2$.

Montrer que :

$$I_1(g)=\int_{-1}^{+1}\left[g_1\left(\sqrt{1-s^2},s\right)\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\left(\sqrt{1-s^2},s\right)-g_1\left(-\sqrt{1-s^2},s\right)\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\left(-\sqrt{1-s^2},s\right)\right]ds-\iint_B g_1(x)\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1\partial x_2}(x)dx_1dx_2$$

On obtient alors, de façon analogue :

$$I_2(g)=\int_{-1}^{+1}\left[g_1\left(s,\sqrt{1-s^2}\right)\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\left(s,\sqrt{1-s^2}\right)-g_1\left(s,-\sqrt{1-s^2}\right)\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\left(s,-\sqrt{1-s^2}\right)\right]ds-\iint_B g_1(x)\frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2\partial x_1}(x)dx_1dx_2$$

Montrer que : $\iint_B\gamma(x)dx_1dx_2=0$ et donc, que J est constante ; montrer que ceci est impossible.

On a ainsi démontré le théorème de Brouwer particulier : toute application de classe C^2, de B dans B, a au moins un point fixe.

B. Forme générale du théorème de Brouwer

Admettre les questions 12, 13 et 14 qui généralisent le résultat précédent aux fonctions continues

14. Montrer que si $f: B \to B$ est continue, elle possède au moins un point fixe. ADMIS

15. Soit $r > 0$, soit $f : \overline{B}(O,r) \to \overline{B}(O,r)$, montrer que si f est continue elle possède au moins un point fixe (considérer $g: B \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = \frac{1}{r} f(rx)$).

16. Soit A un convexe fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, soit $f: A \to \mathbb{R}^2$, f continue telle que : $f\left(A\right) \subset A$.

a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $A \cup f(A) \subset \overline{B}(O,r)$.

b) On associe au convexe fermé non vide A la projection P, comme cela a été défini en question 3. Soit alors $h : \overline{B}(O,r) \to \mathbb{R}^2$ définie par $h(x) = f(P(x))$. Déduire de l'étude de h que f possède au moins un point fixe dans A. On a donc le <u>théorème de Brouwer général</u> : si A est un convexe fermé borné non vide de $\mathbb{R}^2$, et si $f: A \to \mathbb{R}^2$ est continue et vérifie : $f\left(A\right) \subset A$, alors f possède au moins un point fixe dans A.

III. <u>Quelques conséquences du théorème de Brouwer</u>

17. Soit $f: B \to S$, telle que : $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Montrer, en étudiant $(-f)$, que f ne peut être continue (ceci constitue le <u>théorème de non rétraction</u>).

18. Soit $f: B \to \mathbb{R}^2$ telle que : f continue et $f(x) = x$ pour tout $x \in S$. Soit alors $y \notin f(B)$, montrer, en étudiant $g: B \to \mathbb{R}^2$ définie par : $g(x) = \dfrac{y - f(x)}{\|y - f(x)\|}$, que $y \notin B$. En déduire que : $B \subset f(B)$.