L'objet du problème est la recherche de lieux géométriques conduisant à l'étude de courbes planes (appelées en général cubiques circulaires). Les parties I et II donnent deux exemples de telles courbes. Dans la troisième partie, on considère le cas général.

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine notée O, d'axes Ox et Oy et on désigne par a un nombre réel strictement positif donné.

PARTIE I

On désigne par D la droite d'équation $x = 2a$ et par C le cercle de centre M_0 $(-2a, 0)$, de rayon $2a$.
Pour tout nombre réel θ, on désignera par :

* $H(\theta)$ le point d'intersection, lorsqu'il existe, de la droite d'angle polaire θ et de la droite D.
* $M(\theta)$ le point d'intersection de la droite d'angle polaire θ et du cercle C (avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(\theta)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

1°) **Etude de la strophoïde droite**

a) Donner une équation cartésienne, puis une équation polaire du cercle C.
b) Déterminer des coordonnées polaires de $M(\theta)$ et $H(\theta)$, puis du milieu $I(\theta)$ du segment $[M(\theta), H(\theta)]$. En déduire, lorsque θ varie, que $I(\theta)$ décrit la courbe d'équation polaire :
$$r(\theta) = -a\frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}.$$
c) Exprimer $r(\theta + 2\pi)$, $r(\pi + \theta)$, $r(-\theta)$ en fonction de $r(\theta)$. Interpréter géométriquement ces résultats et indiquer sur quelle partie E de $\mathbb{R}$ il suffit d'étudier la courbe pour obtenir la totalité de son support.
d) Déterminer la limite de $r(\theta)\sin(\theta - \pi/2)$ lorsque θ tend vers $\pi/2$. Qu'en déduit-on géométriquement?
e) Etudier le signe de $r(\theta)$ pour $\theta \in E$, représenter sur une même figure la droite D, le cercle C, et le support de cette courbe $\theta \to I(\theta)$.
f) Calculer l'aire de la boucle délimitée par la courbe $\theta \to I(\theta)$.
g) Donner enfin une équation cartésienne du support de la courbe $\theta \to I(\theta)$.

PARTIE II

On désigne par D la droite d'équation $x = 2a$ et par C le cercle de centre M_0 $(-a, 0)$, de rayon a.
Pour tout nombre réel t, on désignera par :

* $H(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et de la droite D.
* $M(t)$ le point d'intersection de la droite d'équation $y = tx$ et du cercle C (avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(t)$ désigne le point d'intersection distinct de O).

2°) **Etude de la cissoïde droite**

a) Donner une équation cartésienne du cercle C.
b) Déterminer les coordonnées de $M(t)$ et $H(t)$, puis du milieu $J(t)$ du segment $[M(t), H(t)]$.
c) Déterminer le vecteur-dérivé à la courbe $t \to J(t)$, puis en déduire les points stationnaires (c'est à dire non réguliers) de celle-ci et calculer le second vecteur dérivé au point de paramètre $t = 0$.
En déduire que la tangente à la courbe $t \to J(t)$ au point $J(t_0)$ a pour équation $t_0(t_0^2 + 3)x - 2y = at_0^3$.
d) Dresser le tableau des variations des coordonnées $x(t)$, $y(t)$ du point $J(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, et représenter sur une même figure la droite D, le cercle C, et le support de cette courbe $t \to J(t)$.
e) Donner enfin une équation cartésienne du support de la courbe $t \to J(t)$.