SPE PC 2
Samedi 15 Decembre 2007
Devoir 4

Le sujet est composé d'un exercice :(première partie du sujet CCP PSI 2007 math 2) et d'un problème (début de E4A PSI 2007 Mazth A)EXERCICE :

CCP PSI 2007
Math 2 partie 1

Notations.
On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, par $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble $\mathbb{N}$ privé de 0.

Pour n entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel réel des matrices carrées à n lignes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients réels.

On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice carrée A
Etant donnée une matrice A, la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A.

Lorsque $A = (a)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on identifie A avec le réel a.
Pour tout entier naturel, on note $n!$ la factorielle de n, avec la convention $0! = 1$.

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq k \leq n$:

- on note $[|p, n|]$ l'ensemble des entiers k tels que $p \leq k \leq n$.
- on rappelle la notation $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

PARTIE I.
calcul de déterminants

I.1. Déterminant d_p.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in [|0, n|]$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i, j) \in [|1, n-p+1|] \times [|1, n-p+1|]$. On note $d_p = \det(A_p)$.

I.1.1. Expliciter les entiers r et s tels que $a_{i,j} = \binom{r}{s}$ pour les quatre coefficients $a_{1,1}, a_{1,n-p+1}$, $a_{n-p+1,1}$ et $a_{n-p+1,n-p+1}$.

I.1.2. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ calculer les déterminants d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.

I.1.3. On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i.

I.1.3.1 Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n-p+1$ à 2, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$). Déterminer le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i.

I.1.3.2 En déduire une relation entre d_p et d_{p+1}, puis en déduire d_p.

I.2. Déterminants D_n et Δ_n.

- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de** 0 **à** n**.**
On note $D_n = \det((i+j)!)$.
- Avec les mêmes notations, on note $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ pour $(i, j) \in [|0, n|] \times [|0, n|]$.

I.2.1. Calculer les déterminants D_0, D_1, D_2, Δ_0, Δ_1 et Δ_2.

I.2.2. Donner une relation entre D_n et Δ_n.

I.2.3. En déduire Δ_n puis D_n.