CONCOURS D'ENTREE A1 1995

Epreuve de MATHEMATIQUES II

Durée 2 Heures

(Tous les candidats)

L'usage des calculatrices est interdit.

On s'attachera à la clarté des démonstrations ainsi qu'à leur rigueur.

On encadrera les différents résultats.

Notations :

$\mathbb{C}[x]$ représente l'algèbre des polynômes de la variable x à coefficients complexes.
$\mathbb{C}_2[x]$ représente l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 .
Selon l'usage courant, on identifiera polynôme et fonction polynômiale.
$\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ représente l'algèbre des matrices (3,3) à coefficients complexes.

$$I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I

1. Soit $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \in \mathbb{C}[x]$.

1.1 Pour tout polynôme g de $\mathbb{C}[x]$, montrer qu'il existe un et un seul couple de polynômes (q, f) de $\mathbb{C}[x]$ tel que

$$\begin{cases} g = P \times q + f \\ f \in \mathbb{C}_2[x] \end{cases}$$

1.2 Soit le paramètre complexe m, montrer que $\frac{P(x)-P(m)}{x-m}$ est un élément de $\mathbb{C}_2[x]$.

1.3 Soit une matrice fixée A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$;
à tout polynôme $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, on fait correspondre la matrice
$g(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$.
Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x] & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \\ g(x) & \mapsto & g(A) \end{array}$$
est un homomorphisme d'anneaux.

C'est à dire $\varphi(1) = I$

$$\forall (g_1, g_2) \in (C[x])^2 \qquad \begin{array}{l} \varphi(g_1+g_2)=\varphi(g_1)+\varphi(g_2) \\ \varphi(g_1\times g_2)=\varphi(g_1)\times\varphi(g_2) \end{array}$$

II

2. On suppose dans toute cette partie que $P(x)=(x-a)^3$ (où $a \in \mathbb{C}$)

2.1 On note f (x) un élément $\mathbb{C}_2[x]$, montrer que l'on peut écrire :
$$\frac{f(x)}{P(x)} = f(a) \cdot \frac{\alpha}{(x-a)^3} + f'(a) \cdot \frac{\beta}{(x-a)^2} + f''(a) \cdot \frac{\gamma}{(x-a)}$$
où α, β, γ, sont trois complexes que l'on déterminera.

2.2 Soit $f(x)=\frac{P(x)-P(m)}{x-m}$, où m est un paramètre complexe. Montrer que l'on peut écrire :
$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{\alpha(m,a)}{(x-a)^3} + \frac{\beta(m,a)}{(x-a)^2} + \frac{\gamma(m,a)}{x-a}$$
où $\alpha(m,a)$, $\beta(m,a)$ et $\gamma(m,a)$ sont trois expressions simples que l'on déterminera.

2.3 Soit la matrice
$$X = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Calculer les valeurs propres de X ; est ce que X est diagonalisable?
Calculer $(X - I)^3$.

2.3.2 Pour quelles valeurs du paramètre m, la matrice $(X - m I)$ est-elle inversible?
Dans ce cas prouver l'égalité matricielle :
$$(X-m\ I)^{-1} = -\frac{\alpha(m,1)}{(m-1)^3} I - \frac{\beta(m,1)}{(m-1)^3}(X-I) - \frac{\gamma(m,1)}{(m-1)^3}(X-I)^2$$

III

3. On suppose dans toute cette partie que :

$P(x) = (x-a)^2 (x-b)$ (où a et b sont des complexes distincts).

3.1 On note $f(x)$ un élément de $\mathbb{C}_2[x]$, montrer que l'on peut écrire :

$$\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{\alpha_1 \ f(a)}{(x-a)^2} + \frac{\beta_1 \ f(a) + \beta_2 \ f'(a)}{x-a} + \frac{\gamma_1 \ f(b)}{x-b}$$

où α_1, β_1, β_2, γ_1 sont des complexes à déterminer.

(Pour calculer β_1 et β_2 il peut être intéressant de dériver $\frac{f(x)}{x-b}$)

3.2 Soit $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x)}{P(x)} = q(x) + \frac{\alpha_1' \ . \ g(a)}{(x-a)^2} + \frac{\beta_1' \ . \ g(a) + \beta_2' \ . \ g'(a)}{x-a} + \frac{\gamma_1' \ . \ g(b)}{x-b}$$

où α_1', β_1', β_2', γ_1', sont des complexes à déterminer, et $q(x)$ est un polynôme que l'on ne cherchera pas à calculer.

3.3 Soit la matrice $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 9 \\ -4 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.3.1 Calculer les valeurs propres de X ; est-elle diagonalisable?

Calculer $(X-I)^2 \times (X-2\ I)$.

3.3.2 En exploitant les résultats précédents, exprimer X^{1995} comme combinaison linéaire de $X - 2I$, $(X-I) \times (X-2I)$ et $(X-I)^2$.

3.4 Soit la matrice $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3.4.1 Vérifier que :

$$(X-I) \times X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4.2 Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice $(X - mI)$ est-elle inversible? On prendra, dans la suite, m vérifiant cette condition.

3.4.3 Soit $P(x) = x^2 \times (x-1)$ et $f(x) = \frac{P(x) - P(m)}{x-m}$

Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{P(x)}$

En déduire $(X - m\ I)^{-1}$ en fonction de $(X - I)$ et X.