E.N.S.I. de PHYSIQUE option TA session 1987

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Notations :

Pour tout entier m strictement positif, $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre m à coefficients complexes.

À toute matrice N de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, on associera l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^m$ défini par la matrice N relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^m$. L'identité de $\mathbb{C}^m$ est notée id.

PREMIÈRE PARTIE

Dans cette partie, M et A sont deux matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, avec $m \geqslant 2$, φ et f leurs endomorphismes associés.

I.1. On suppose que M est diagonalisable et que $M^2 = A$; démontrer que A est diagonalisable.

I.2. Prouver que si A est diagonalisable, il existe au moins une matrice diagonalisable M telle que $M^2 = A$.

I.3. Prouver que si $M^2 = A$, alors M et A commutent ($MA = AM$).

I.4. *a.* On suppose que μ est une valeur propre de φ; démontrer que μ^2 est une valeur propre de φ^2.

b. On suppose que x est un vecteur propre de φ; démontrer que x est aussi un vecteur propre de φ^2. La réciproque est-elle vraie ?

I.5. *a.* Démontrer l'équivalence des 4 propriétés suivantes :

(1) φ non injectif;

(2) 0 est valeur propre de φ;

(3) 0 est valeur propre de φ^2;

(4) φ^2 non injectif.

b. Soit λ une valeur propre non nulle de φ^2, et μ un nombre complexe tel que $\mu^2 = \lambda$; démontrer que :
$\operatorname{Ker}(\varphi^2 - \lambda\,\mathrm{id}) = \operatorname{Ker}(\varphi - \mu\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(\varphi + \mu\,\mathrm{id})$.

c. On suppose que φ^2 est diagonalisable; démontrer l'équivalence suivante :
(φ diagonalisable) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi^2$).

I.6. On suppose que f possède m valeurs propres distinctes; démontrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'endomorphismes φ tels que $\varphi^2 = f$ et qu'ils sont tous diagonalisables.

I.7. Dans cette question $m = 3$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$.

Calculer leur somme et leur produit.

Tournez la page S. V. P.

I.8. m et A sont à nouveau quelconques.

a. On suppose que f est diagonalisable et que l'une au moins de ses valeurs propres est non nulle avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2. Démontrer qu'il existe une infinité d'endomorphismes φ diagonalisables tels que $\varphi^2 = f$.

b. On suppose que f est diagonalisable et que 0 est valeur propre de f avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2. Démontrer qu'il existe une infinité d'endomorphismes φ non diagonalisables tels que $\varphi^2 = f$. (indication pour a et b : définir φ sur une base de vecteurs propres de f).

Deuxième partie

Dans cette partie et les suivantes, on note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et on utilise les matrices suivantes de E :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On pose $C(x, y, z) = x\,I + y\,J + z\,K$ pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{C}^3$.

M est une matrice quelconque de E.

On appelle f et φ les endomorphismes associés à B et M.

II.1. B est-elle diagonalisable ?

II.2.*a*. Soit $(y, z) \in \mathbb{C}^2$ et $p \in \mathbb{N}^*$; calculer $(y\,J + zK)^p$.

b. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; calculer $[C(x, y, z)]^n$ (on trouvera $[C(x, y, z)]^n = C\left(x^n, n\,y\,x^{n-1}, \frac{1}{2}\,n\,(n-1)\,x^{n-2}\,y^2 + n\,x^{n-1}\,z\right)$).

c. Calculer B^n pour tout entier naturel n, en posant $B^0 = I$.

II.3. *a*. Prouver que B est inversible et calculer son inverse B^{-1}.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B^{-n} = (B^{-1})^n$; calculer B^{-n}.

Troisième partie

On désigne par F l'ensemble des matrices de E qui commutent avec B ($MB = BM$). f et φ sont les endomorphismes associés à B et M.

III.1. *a*. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Prouver que (I, J, K) et (I, B, B^2) sont 2 bases de F.

c. Déterminer les matrices diagonalisables de F.

Tournez la page S. V. P.

III.2. On suppose que $M \in F$.

a. Démontrer que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de φ. La réciproque est-elle vraie ?

b. Démontrer que si x est un vecteur propre de φ, $f(x)$ est aussi un vecteur propre de φ.

III.3. *a.* Déterminer le(s) sous-espace(s) vectoriel(s) H de $\mathbb{C}^3$ stable(s) par f ($f(H) \subset H$) de dimension 1.

b. Déterminer le(s) sous-espace(s) vectoriel(s) H de $\mathbb{C}^3$ stables par f de dimension 2.

c. On suppose que $M \in F$.
Démontrer que tout sous-espace stable par f est aussi stable par φ. La réciproque est-elle vraie ?

Quatrième partie

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, on désigne par R_p l'ensemble des matrices M de E telles qu $M^p = B$.

IV.1. *a.* Démontrer que $R_p \subset F$.

b. Quelles sont les valeurs possibles de det M ?

IV.2. *a.* Si p est impair, prouver qu'il existe une seule matrice de R_p à coefficients réels, que l'on déterminera, et qu l'on notera $B^{\frac{1}{p}}$.

b. Si p est pair, prouver que R_p contient 2 matrices à coefficients réels, que l'on déterminera. On notera $B^{\frac{1}{p}}$ celle dont le déterminant est strictement positif.

c. Déterminer les matrices de R_p à coefficients complexes.

IV.3. Calculer la somme et le produit de toutes les matrices de R_p.

IV.4. Pour tous les réels x, y, z et r, avec $x > 0$, on définit la matrice $[C(x, y, z)]^r$ par :

$$[C(x, y, z)]^r = C\left(x^r, r\, y\, x^{r-1}, \frac{1}{2} r(r-1)\, x^{r-2} y^2 + r\, x^{r-1} z\right).$$

a. Cette définition, appliquée à la matrice B, est-elle compatible avec les résultats obtenus pour $r \in \mathbb{Z}$, et pour $r = \dfrac{1}{p}$ $(p \in \mathbb{N}^*)$?

b. On pose, pour simplifier, $C = C(x, y, z)$ et $C' = C(x', y', z')$ avec x, y, z, x', y' et z' réels, $x > 0$, $x' > 0$.

Démontrer les formules suivantes :

$$\forall (r, s) \in \mathbb{R}^2 \qquad C^{r+s} = C^r \times C^s$$

$$\forall (r, s) \in \mathbb{R}^2 \qquad (C^r)^s = C^{rs}$$

$$\forall r \in \mathbb{R} \qquad (C \times C')^r = C^r \times C'^r.$$

• • •
•